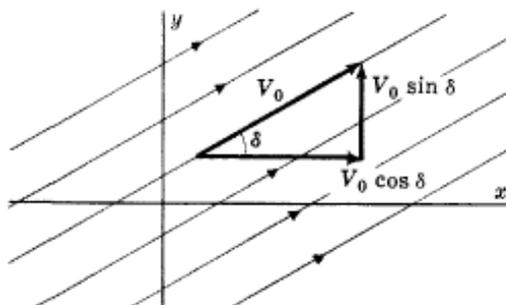


SOLUZIONI 10.2

- (1) Per un fluido che si muove a velocità costante v_0 in una direzione che forma un angolo θ con la direzione positiva dell'asse delle x



si ha

$$v_x = v_0 \cos \theta, \quad v_y = v_0 \sin \theta$$

Allora il campo (coniugato) complesso è

$$\bar{v} = v_0 \cos \theta - i v_0 \sin \theta = v_0 e^{-i\theta}$$

e il potenziale complesso V è dato da

$$\frac{dV}{dz} = \bar{v} = v_0 e^{-i\theta},$$

da cui

$$V(z) = v_0 e^{-i\theta} z.$$

Inoltre:

- (a) Il potenziale di velocità Φ e la funzione di corrente (o di flusso) Ψ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria del potenziale complesso. Quindi

$$\Phi = \operatorname{Re}(v_0 e^{-i\theta} z) = v_0(x \cos \theta + y \sin \theta)$$

$$\Psi = \operatorname{Im}(v_0 e^{-i\theta} z) = v_0(y \cos \theta - x \sin \theta)$$

- (b) Le linee di corrente (o di flusso) sono date da $\Psi = v_0(y \cos \theta - x \sin \theta) = \beta$, per differenti valori di β . Fisicamente, in regime stazionario, una linea di flusso è il percorso effettivamente seguito da una particella di fluido. In questo caso si tratta di rette.

Le linee equipotenziali sono date da $\Phi = v_0(x \cos \theta + y \sin \theta) = \alpha$, per differenti valori di α . Geometricamente, sono linee perpendicolari alle linee di flusso. Tutti i punti di una linea equipotenziale si trovano allo stesso potenziale.

(2) Il potenziale complesso di un fluido in moto è dato da

$$V(z) = v_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

dove v_0 e a sono costanti positive.

(a) Sia $z = re^{i\theta}$. Allora

$$\begin{aligned} V &= \Phi + i\Psi \\ &= v_0 \left(re^{i\theta} + \frac{a^2}{r} e^{-i\theta} \right) \\ &= v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + i v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \end{aligned}$$

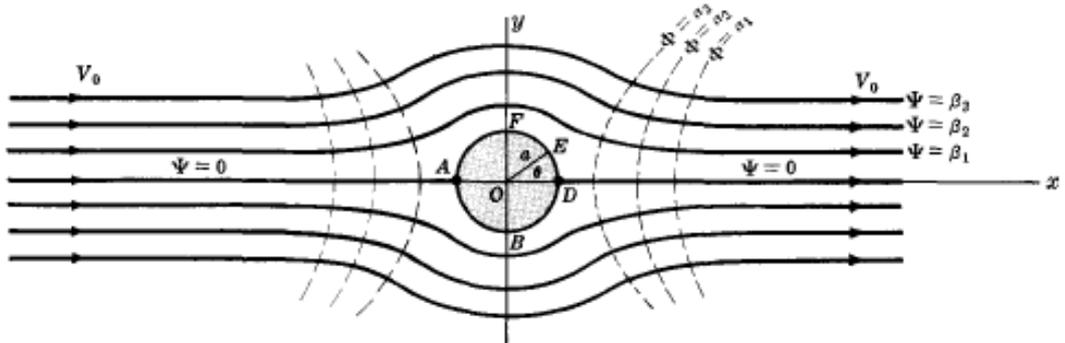
da cui

$$\Phi = v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \Psi = v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

Le linee di flusso sono date da $\Psi = \beta = \text{costante}$, al variare di β , cioè

$$v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta = \beta$$

In figura sono tracciate a tratto continuo e rappresentano il percorso effettivo delle particelle di fluido:



Si osservi che $\Psi = 0$ corrisponde a $r = a$ e $\theta = 0, \pi$. Le linee equipotenziali sono date da $\Phi = \alpha = \text{costante}$, al variare di α , cioè

$$v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta = \alpha.$$

In figura sono tratteggiate e sono perpendicolari alle linee di flusso.

(b) Il cerchio $r = a$ rappresenta una linea di flusso. Non essendoci alcun flusso attraverso una linea di flusso, esso può essere considerato come un ostacolo circolare di raggio a posto sul cammino del fluido.

(c) Il campo di velocità coniugato è

$$\mathbf{v} = \overline{V'(z)}.$$

La derivata del potenziale è

$$\begin{aligned}\overline{V'(z)} &= v_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \\ &= v_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} e^{-2i\theta} \right) \\ &= v_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) + i v_0 \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta.\end{aligned}$$

E quindi

$$\mathbf{v} = \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right) - i v_0 \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta.$$

Lontano dall'ostacolo ($r \gg a$) si vede che approssimativamente $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_x$, cioè il fluido si muove nella direzione positiva dell'asse delle x con velocità costante v_0 . Determinare la velocità in funzione della posizione e il suo valore lontano dall'ostacolo.

(d) I punti di stagnazione del fluido (cioè, i punti nei quali la velocità è nulla) sono dati da $\mathbf{v} = 0$ o, equivalentemente, da $V'(z) = 0$, cioè

$$v_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) = 0 \quad \text{ovvero} \quad z = \pm a,$$

cioè i punti A e D della figura.

(e) La dimostrazione che con la trasformazione conforme

$$w = z + \frac{a^2}{z}$$

il moto del fluido nel piano z è trasformato in un moto uniforme con velocità costante v_0 nel piano w e immediata. Basta scrivere

$$v_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) = v_0 w$$

e il secondo membro rappresenta un moto con velocità costante v_0 del fluido nel piano w [Problema (1)].

(3) Se un fluido ha potenziale complesso

$$V(z) = i\gamma \ln z = i\gamma(\ln r + i\theta) = -\gamma\theta + i\gamma \ln r,$$

la sua velocità è

$$\mathbf{v} = \overline{V'(z)} = i\gamma \frac{1}{z} = -i\gamma \frac{1}{r} e^{i\theta} = \frac{\gamma \sin \theta}{r} - i \frac{\gamma \cos \theta}{r}$$

La circolazione della velocità attorno al vortice è

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi\gamma$$

(4) Il potenziale complesso

$$V(z) = v_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\gamma}{2\pi} \ln z$$

sovrappone al moto dell'esercizio 2 una circolazione come quella vista nell'esercizio 3 (divisa per 2π). Sia $z = re^{i\theta}$. Allora

$$\begin{aligned} V &= \Phi + i\Psi \\ &= v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\gamma\theta}{2\pi} + i \left[v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\gamma}{2\pi} \ln r \right]. \end{aligned}$$

Le linee equipotenziali e le linee di flusso sono date da

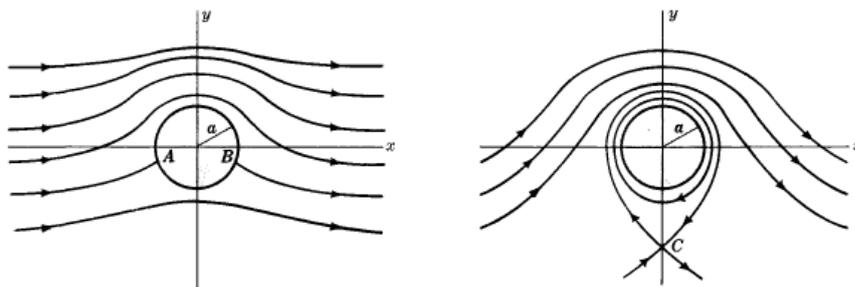
$$\begin{aligned} \Phi &= v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\gamma\theta}{2\pi} = \alpha \\ \Psi &= v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\gamma}{2\pi} \ln r = \beta. \end{aligned}$$

In generale, vi sono due punti di stagnazione, soluzione di $V'(z) = 0$, cioè

$$v_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i\gamma}{2\pi z} = 0 \quad \text{ovvero} \quad z = \frac{-i\gamma}{4\pi v_0} \pm \sqrt{a^2 - \frac{\gamma^2}{16\pi^2 v_0^2}}.$$

Dato che $r = a$ è una linea di flusso corrispondente a $\beta = \frac{\gamma}{2\pi} \ln a$, il moto può essere considerato il moto attorno ad un ostacolo circolare come quello del problema 2. Lontano dall'ostacolo, il fluido ha velocità costante v_0 .

L'andamento del moto cambia al variare di γ . In figura sono illustrate due possibilità:



Nella figura a sinistra si ha $\gamma < 4\pi a v_0$ e i punti di stagnazione sono in A e B . Nella figura a sinistra, $\gamma > 4\pi a v_0$ e si ha un solo punto di stagnazione in C