

ESERCIZI DI RIEPILOGO 1

Training sui fondamentali per poi potere affrontare esercizi più difficili. Procedere passin passetto, l'ordine è grosso modo di difficoltà crescente. Non fare salti, le soluzioni di esercizi precedenti possono essere d'aiuto per esercizi successivi. Per comodità, vengono date le risposte.

Classificare le singolarità di $f(z)$ nei punti indicati.

- (1) $f(z) = \cot z$ in $z = 0$. Resp. Polo semplice.
- (2) $f(z) = \frac{1 + \cos z}{(z - \pi)^2}$ in $z = \pi$. Resp. Eliminabile.
- (3) $f(z) = \sin(1/z)$ in $z = 0$. Resp. Singolarità essenziale.
- (4) $f(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + 2z + 1}$ in $z = -1$. Resp. Polo di ordine 2.
- (5) $f(z) = z^{-3} \sin z$ in $z = 0$. Resp. Polo di ordine 2.
- (6) $f(z) = (\csc z)(\cot z)$ in $z = 0$. Polo di ordine 2.

Trovare i residui di $g(z)$ nei punti indicati.

- (7) $g(z) = \frac{1}{1 + z^2}$ in $z = -i$. Resp. Res = $\frac{i}{2}$.
- (8) $g(z) = \frac{e^z}{z^3}$ in $z = 0$. Resp. Res = $\frac{1}{2}$.
- (9) $g(z) = \tan z$ in $z = \pi/2$. Resp. Res = -1
- (10) $g(z) = \frac{z + 2}{(z^2 - 2z + 1)^2}$ in $z = 1$. Resp. Res = 0.
- (11) $g(z) = f(z)/h(z)$ in $z = a$ con $f(a) \neq 0$ e $h'(a) \neq 0$. Dimostrare che $z = a$ è un polo semplice e trovare il residuo. Resp. Res = $f(a)/h'(a)$.

Le singolarità delle funzioni sotto sono tutte poli semplici. Determinare e usare l'esercizio (11) per trovare i residui in esse.

- (12) $g(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 5iz - 4}$. Resp. i e $4i$. Res₁ = $(-2/3)i$ e Res₂ = $(17/3)i$.
- (13) $g(z) = \tan z$. Resp. $(n + \frac{1}{2})\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Res_n = -1
- (14) $g(z) = \frac{z^2}{z^3 - 8}$. Resp. 2, $2e^{2i\pi/3}$ e $2e^{4i\pi/3}$. Res = $1/3$.
- (15) $g(z) = \frac{e^z}{\sin z}$. Resp. $n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Res_n = $(-1)^n e^{n\pi}$.
- (16) $g(z) = \frac{\sin z}{z^2 - 3z + 2}$. Resp. 1 e 2. Res₁ = $-\sin 1$ e Res₂ = $\sin 2$.

Usare il metodo dei residui per calcolare gli integrali seguenti. Quando possibile, potete usare i risultati degli esercizi precedenti

- (17) $\oint_C \frac{z^2}{z^3 - 8} dz$, dove C (percorso in senso antiorario) è il cerchio di raggio 1 e centro $3/2$. Resp. $2\pi i/3$
- (18) $\oint_C \frac{z^2}{z^3 - 8} dz$, dove C (percorso in senso antiorario) è il cerchio di raggio 3 e centro 0. Resp. $2\pi i$
- (19) $\oint_C \frac{z^2}{z^3 - 8} dz$, dove C (percorso in senso antiorario) è il cerchio di raggio 1 e centro 0. Resp. πi
- (20) $\oint_C \frac{z^2 - 1}{z^2 - 5iz - 4} dz$, dove C è una qualunque curva semplice chiusa (percorsa in senso antiorario) che include i seguenti punti: (a) solo i , (b) solo $4i$, (c) sia i sia $4i$, (d) né i né $4i$. Resp. (a) $4\pi/3$, (b) $-34\pi/3$, (c) -10π , (d) 0.
- (21) $\oint_C \frac{e^z}{\sin z} dz$, dove C (percorso in senso antiorario) è il rettangolo con vertici $-\pi/2 - i$, $5\pi/2 - i$, $-\pi/2 + 2i$ e $5\pi/2 + 2i$. Resp. $2\pi(1 - e^\pi + e^{2\pi})$.
- (22) $\oint_C \frac{z + 2}{(z^2 - 2z + 1)^2} dz$, dove C (percorso in senso antiorario) è il semicerchio nel semipiano destro che ha centro 0, raggio $R > 1$ e diametro collocato lungo l'asse immaginario.
- (23) $\oint_C \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz$, dove C (percorso in senso *orario*) è il semicerchio nel semipiano superiore che ha centro 0, raggio $R > 2$ e diametro collocato lungo l'asse reale. Resp. $-\pi/6$.

Calcolare i seguenti integrali reali con i metodi dell'analisi complessa

- (24) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 3 \sin t}$. Resp. $\pi/2$.
- (25) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - 2 \cos t}$. Resp. $2\pi/\sqrt{5}$.
- (26) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{13 + 12 \cos t}$. Resp. $-4\pi/3$.
- (27) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$. Resp. $\pi/6$.
- (28) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh x}$. Resp. π .
- (29) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{\omega^2 + \kappa^2}$. Resp. $(\pi/\kappa)e^{-\kappa t}$ per $t \geq 0$ e $(\pi/\kappa)e^{\kappa t}$ per $t < 0$.