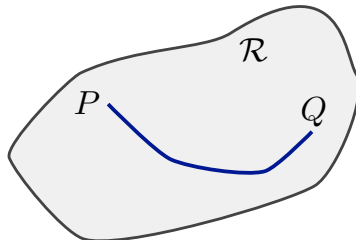


SOLUZIONI 11.2

- (1) Se $f(z)$ è analitica in una regione \mathcal{R} e se in tutti i punti di un arco di curva PQ in \mathcal{R} si ha $f(z) = 0$, allora $f(z) = 0$ in tutta la regione \mathcal{R} .



Infatti, preso un punto qualunque z_0 sull'arco PQ si espanda in serie $f(z)$ in quel punto (essendo analitica). La serie

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots$$

convergerà in un cerchio C con centro in z_0 e che si estende almeno alla frontiera di \mathcal{R} . MA, per ipotesi, $f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) = f''(z_0) = \dots = 0$. Quindi in $f(z) = 0$ in C . Prendendo adesso un altr punto in C e continuando il processo, si può dimostrare che $f(z)$ è nulla in tutta la regione \mathcal{R} . Si confronti con l'esercizio 2 (e la sua soluzione) del foglio 2.1.

- (2) Data per valida l'identità $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ per tutti i valori reali di z , sulla base della nozione di prolungamento analitico, si dimostra che l'identità deve valere per tutti i valori complessi di z nel seguente modo.

Sia $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ e sia \mathcal{R} una regione del piano complesso contenente un tratto dell'asse reale. Poiché $\sin z$ e $\cos z$ sono analitiche, ne segue che anche $f(z)$ è analitica in \mathcal{R} . Per il problema precedente, $f(z) = 0$ in tutta la regione \mathcal{R} . Dato che \mathcal{R} è arbitraria, l'identità $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ risulta dimostrata in tutto il piano complesso. Questo metodo, per quanto elementare, è utile per estendere al piano complesso identità che valgono sull'asse reale.

- (3) Sia

$$F_1(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-zt} dt$$

- (a) Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^3 e^{-zt} dt &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L t^3 e^{-zt} dt \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[t^3 \frac{e^{-zt}}{-z} - 3t^2 \frac{e^{-zt}}{z^2} + 6t \frac{e^{-zt}}{-z^3} - 6 \frac{e^{-zt}}{z^4} \right]_{t=0}^L \\ &= \frac{6}{z^4} \quad \text{se } \operatorname{Re}(z) > 0 \end{aligned}$$

Risulta così dimostrato che $F_1(z)$ è analitica in tutto il semipiano destro $\operatorname{Re}(z) > 0$.

- (b) Per $\operatorname{Re}(z) > 0$, l'integrale ha il valore $F_2(z) = 6/z^4$. Ma questa funzione è analitica in tutti i punti eccetto $z = 0$. Dato che per $\operatorname{Re}(z) > 0$ si ha $F_2(z) = F_1(z)$, ne segue che $F_2(z) = 6/z^4$ è il prolungamento analitico cercato per $\operatorname{Re}(z) < 0$.

Dimostrare che $F_1(z)$ può essere prolungata analiticamente nel semipiano sinistro $\operatorname{Re}(z) < 0$.