

15.1

- (1) I polinomi di Legendre (si veda la lezione 10.2.2) sono ottenuti dallo sviluppo

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2-2zx}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n(x).$$

Equivalentemente, possono essere definiti dell'integrale nel piano complesso

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dZ}{Z^{n+1} \sqrt{1-2zZ+Z^2}}$$

dove C è una qualunque curva chiusa orientata positivamente che racchiude l'origine.

- (a) Usando la formula nel piano complesso, determinare i primi 5 polinomi di Legendre (per verificare se il risultato ottenuto è esatto si usi Google)
 - (b) Verificare che i primi 5 polinomi di Legendre sono un sistema ortogonale in $L^2(-1, 1)$.
 - (c) Se non sono normalizzati, normalizzarli.
 - (d) Qual è la migliore approssimazione della funzione $y = \sin(2\pi x)$ nello spazio \mathcal{M} generato dai primi 5 polinomi di Legendre?
 - (e) Siete in grado di stimare l'errore quadratico medio?
 - (f) Se 5 vi sembrano troppi, scendete a 3.
 - (g) Se avete accesso a un computer, fate dei grafici che mostrino il grado di approssimazione all'aumentare del numero di polinomi utilizzati.
- (2) Dare una spiegazione diretta della disuguaglianza di Bessel sulla base del teorema di proiezione.