

15.2

- (1) Trovare la serie di Fourier della funzione che in $[-\pi, \pi]$ vale

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

e che è periodica di periodo 2π sull'asse reale.

- (2) Qual è la serie di Fourier della funzione periodica di periodo 2π definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 3 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

A che valore converge la serie per $x = 0$?

- (3) Sia h un dato numero nell'intervallo $(0, \pi)$. Trovare la serie di Fourier di coseni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < h \\ 0 & \text{se } h < x < \pi \end{cases}$$

- (4) Calcolare la serie di Fourier di seni della funzione definita da $f(x) = x(\pi - x)$ in $(0, \pi)$. Usare la sua rappresentazione di Fourier per trovare il valore della serie infinita

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots$$

- (5) Sia h un dato numero nell'intervallo $(0, \pi/2)$. Trovare la serie di Fourier di coseni della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{2h - x}{2h} & \text{se } 0 < x < 2h \\ 0 & \text{se } 2h < x < \pi \end{cases}$$

- (6) Qual è la serie di Fourier di seni della funzione $f(x) = x^2$ quando $0 < x < \pi$?
- (7) Trovare la serie di Fourier di $f(x) = |x|$ quando $-L < x < L$ (ed è periodica di periodo $2L$ sull'asse reale).
- (8) Calcolare la serie di Fourier di $f(x) = x^2$ quando $0 < x < 2\pi$ e $f(x)$ ha periodo 2π .
- (9) La funzione f è definita da $f(x) = e^x$ per $-L < x < L$. Trovare la sua serie di Fourier.
- (10) Sia a un dato numero intero. La funzione $f(x)$ è definita da $f(x) = \sin ax$ per $0 < x < \pi$. Trovare la sua serie di Fourier di coseni.
- (11) Una funzione f ha la proprietà che $f(x + \pi) = -f(x)$. Mostrare che tutti i suoi coefficienti di Fourier pari sono zero.

(12) Calcolare l'integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx \right) \right]^2 dx$$

(13) Si consideri la serie di Fourier associata alla funzione (a “dente di sega”) $f(x) = x$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e periodica di periodo 2π :

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$$

e sia

$$S_N(f)(x) = -2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$$

la somma parziale della serie per una dato N .

(a) Si determini per quale valore x^* nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $S_N(f)(x)$ ha un massimo assoluto.

Aiuto: la risposta è

$$x^* = \frac{N\pi}{N+1}.$$

Per ottenere questo risultato occorre trovare gli zeri della derivata della funzione. Un modo semplice di ottenere questo è di calcolare la derivata di $S_N(f)$, poi porre $z = e^{ix}$ ed esprimere la derivata come parte reale di una successione complessa. Riconosciuta la progressione geometrica, il gioco è fatto.)

(b) Calcolare il limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x^*)$$

Interessa il valore numerico!

Aiuto: Ogni qual volta si incontra un limite del tipo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{n}{N}\right) \frac{1}{N}$$

si deve riconoscere che si ha di fronte un integrale di Riemann. Infatti, l'integrale di Riemann è il limite della somma dei Δx_i moltiplicati per il valore della funzione in un punto qualunque dei Δx_i e ovviamente il limite non dipende dalla partizione. Nel caso sopra abbiamo una partizione dell'intervallo $[0, 1]$ di ampiezza $1/N$ e $f(n/N)$ è il valore della funzione calcolata nell'estremo destro dei Δx_i . Quindi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{n}{N}\right) \frac{1}{N} = \int_0^1 f(x) dx$$

In questo caso dovrete ottenere

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x^*) = 2 \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}$$

Il calcolo numerico dell'integrale lo si può fare per sviluppo in serie di Taylor di $\sin x/x$ e poi passando all'integrazione termine a termine. Diciamo che ci basta un valore numerico con 3 cifre significative dopo la virgola. Dovreste ottenere

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x^*) = 3.704$$

Si ha quindi uno sfioramento (rispetto al valore $y = \pi$ della funzione in $x = \pi$) di 0.562 che è circa il 9% di 2π , cioè il 9% della variazione della funzione nel punto di discontinuità $x = \pi$ (dove la funzione salta da π a $-\pi$). Questo fatto, detto *fenomeno di Gibbs*, è abbastanza universale: se ripetete il calcolo per l'onda quadra, trovate di nuovo uno sfioramento di circa il 9% della variazione della funzione nel punto di discontinuità.

(14) Per $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ continua e N dato, si consideri la somma parziale

$$S_N(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{|n| \leq N} c_n e^{inx}, \quad c_n = \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy$$

(a) Dimostrare che

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y) f(y) dy,$$

dove

$$D_N(u) = \sum_{|n| \leq N} e^{inu}.$$

Nella letteratura $D_N(u)$ è noto come nucleo di Dirichlet.

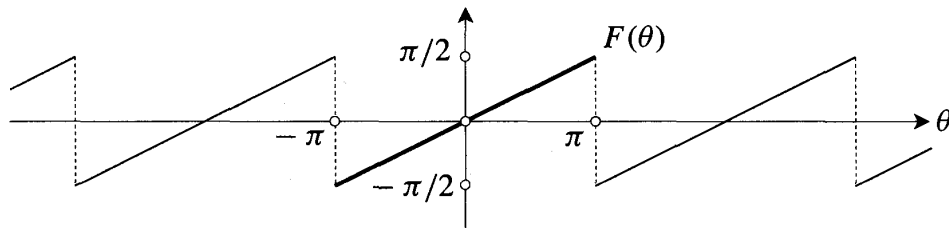
Aiuto. Si proceda per calcolo diretto

$$S_N(f) = \sum_{|n| \leq N} c_n e^{inx} = \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{|n| \leq N} e^{inx} e^{-iny} f(y) dy = \dots$$

(b) Dimostrare che D_N ha media 1 per tutti gli N ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(u) du = 1$$

- (15) Si consideri la funzione periodica $F(\theta)$ a “dente di sega” (diversa da quella dell’esercizio precedente) rappresentata in figura



Facendo la sostituzione $z = e^{i\theta}$ nello sviluppo in serie del ramo principale del logaritmo

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots,$$

- (a) si calcoli la serie di Fourier di $F(\theta)$, *solo con i metodi dell’analisi complessa*; (b) si calcoli la serie di Fourier di $F(\theta)$ con i metodi dell’analisi di Fourier e si confronti con quanto ottenuto in (a).
- (16) Si consideri l’oscillatore armonico smorzato

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t)$$

dove $f(t)$ è una forza periodica di periodo T (termine forzante).

- (a) Si determini la soluzione a regime con i metodi delle serie di Fourier. (Aiuto: si cerchi la soluzione $x(t)$ espressa come serie di Fourier e si determinino i coefficienti di Fourier di questa serie in funzione dei coefficienti di Fourier della forza periodica $f(t)$).
- (b) Si assuma che il termine forzante sia una funzione continua L^2 . Dimostrare matematicamente il principio fisico: **Anche se la forzante ha frequenze molto alte, l’oscillatore si comporta in modo più regolare: non può rispondere molto a frequenze che sono molto più grandi della sua frequenza naturale ω_0 .**
- (c) Si fornisca la soluzione esplicita nel caso in cui la forzante è un’onda quadra di ampiezza A e si verifichi se vale quanto trovato in (b).
- (d) Si usi un calcolatore per graficare soluzioni approssimate per $N = 10, 20, 50, 100$ termini dello sviluppo di Fourier della soluzione (si assegnino valori numerici ragionevoli alle costanti del problema).