

SOLUZIONI 15.2

(1)

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}$$

(2)

$$\sim 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}$$

Per $x = 0$ la serie converge a 2.

- (3) Una serie di seni e coseni ad intervallo dimezzato è una serie in cui sono presenti, rispettivamente, solo termini in seno o solo termini in coseno. Quando si deve calcolare una serie in un intervallo dimezzato corrispondente ad una funzione assegnata, si definisce la funzione nell'intervallo $[0, L/2]$ e quindi si precisa se la funzione è pari o dispari di modo che venga definita nell'altra metà dell'intervallo. Equivalentemente, se si chiede lo sviluppo in coseni, si sottintende che la funzione è pari nell'intervallo $[-L/2, L/2]$, cioè $f(-x) = f(x)$; se si chiede lo sviluppo in seni, si sottintende che la funzione è dispari in $[-L/2, L/2]$, cioè $f(-x) = -f(x)$. In questo esercizio $L = 2\pi$ e poichè è richiesto uno sviluppo in coseni, si intende la serie di Fourier della funzione che è estesa per parità $f(-x) = f(x)$ a $[-\pi, 0]$. La serie sarà quindi

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right] \cos nx$$

Per la funzione dell'esercizio, si ottiene la serie

$$\frac{2h}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nh)}{nh} \cos nx \right]$$

- (4) In questo caso è richiesto uno sviluppo in seni. Si sottintende che la funzione è dispari in $[-\pi, \pi]$ e che è definita come $f(-x) = -f(x)$. Il termine costante è chiaramente zero e una serie di seni è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \right] \sin nx$$

Per la funzione dell'esercizio, riarrangiando i termini, si ottiene la serie

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

Posto $x = \frac{\pi}{2}$ in $f(x) = x(\pi - x)$ e riarrangiando i termini si ottiene

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots$$

- (5) La funzione, definita nell'intervallo $[0, \pi]$ è da considerarsi pari in $[-\pi, \pi]$ e quindi sviluppabile in soli coseni. Si ottiene la serie

$$\frac{2h}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(nh)}{nh} \right)^2 \cos nx \right]$$

(6)

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} [(-1)^n - 1] \right\} \sin nx$$

(7)

$$\frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \left[\frac{(2n+1)n\pi}{L} \right]$$

(8)

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

(9)

$$\frac{e^L - e^{-L}}{2L} + L(e^L - e^{-L}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{L^2 + n^2\pi^2} \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + \pi L(e^L - e^{-L}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{L^2 + n^2\pi^2} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

(10)

$$\frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{a^2 - (2n+1)^2} \quad \text{se } a \text{ è pari}$$

$$\frac{4a}{\pi} \left\{ \frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{a^2 - 4n^2} \right\} \quad \text{se } a \text{ è dispari}$$

- (11) Se una funzione f ha la proprietà che $f(x + \pi) = -f(x)$ è periodica di periodo 2π . Infatti, $f(x + 2\pi) = -f(x + \pi) = -(-f(x)) = f(x)$. Allora

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i2nx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) e^{-i2nx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(x) e^{-i2nx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) e^{-i2nx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x + \pi) e^{-i2n(x+\pi)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) e^{-i2nx} dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x) e^{-i2nx} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (12) Usare l'identità di Parseval!

- (13) Svolto a lezione.

- (14) Discusso a lezione. La proprietà che la media del nucleo di Dirichlet è 1, qualunque sia N , segue immediatamente all'osservazione che la funzione 1 è ortogonale a tutti gli e^{inu} eccetto per $n = 0$.
- (15) Per il ramo principale del logaritmo si ha

$$\text{Log}(1+z) = |1+z| + i \arg(1+z)$$

Poniamo $z = e^{i\theta}$. Allora $\arg(1+e^{i\theta})$ è chiaramente $\theta/2$ (regola del parallelogramma per sommare i vettori). Quindi

$$\text{Im}(\text{Log}(1+z)) = \frac{\theta}{2} \quad -\pi \leq \theta < \pi$$

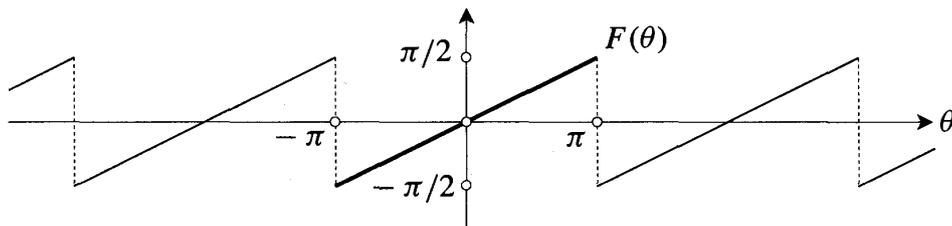
D'altro canto, si ha lo sviluppo in serie

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots,$$

Ponendo $z = e^{i\theta}$ a secondo membro e prendendone la parte immaginaria, otteniamo

$$\frac{\theta}{2} = \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \frac{\sin 4\theta}{4} + \dots \quad -\pi \leq \theta < \pi$$

che è proprio lo sviluppo di Fourier della funzione



come si può verificare usando i metodi standard per il calcolo della serie di Fourier (questa verifica è lasciata allo studente).

- (16) Discusso a lezione. È lasciato da fare:
- Fornire la soluzione esplicita nel caso in cui la forzante è un'onda quadra di ampiezza A .
 - Usare un calcolatore per graficare soluzioni approssimate per $N = 10, 20, 50, 100$ termini dello sviluppo di Fourier della soluzione.