

ESERCIZI DI RIEPILOGO 2
(VERIFICA DI ANALISI FUNZIONALE E SERIE DI FOURIER)

SPAZI VETTORIALI E FUNZIONALI

1. Determinare quali sei seguenti insiemi è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare e se è uno spazio vettoriale reale o complesso.
 - (a) Lo spazio $\mathcal{P}_n(I)$ dei polinomi in un intervallo I della retta reale che sono: di grado minore o uguale a n , con coefficienti complessi e su \mathbb{C} (cioè sono permesse moltiplicazioni con numeri complessi).
 - (b) Lo spazio $\mathcal{P}(I)$ dei polinomi in un intervallo I della retta reale che sono: con coefficienti immaginari e su \mathbb{R} (cioè sono permesse moltiplicazioni solo con numeri reali).
 - (c) L'insieme dei numeri reali su \mathbb{C} .
 - (d) L'insieme delle funzioni a valori complessi di classe $C^p(I)$ su \mathbb{R} .
2. Sia X uno spazio vettoriale. Dimostrare che se $\{e_n\}$ e $\{f_n\}$ sono basi di X e una di esse è finita, cioè, con un numero finito di elementi, allora anche l'altra lo è e il numero di elementi è lo stesso.
3. Dati due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} in uno spazio con prodotto scalare, sotto quali condizioni vale l'uguaglianza $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$? Può questa uguaglianza valere anche se i vettori non sono ortogonali?
4. Siano $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ in $L^2(-1, 1)$. Calcolare
 - (a) $\langle f_1 | f_2 \rangle$
 - (b) $\langle f_1 | f_3 \rangle$
 - (c) $\|f_1 - f_2\|^2$
 - (d) $\|2f_1 + 3f_2\|$
5. Calcolare la proiezione di $f(x) = \cos^2 x$ su ciascuna delle funzioni $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \cos 2x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ (si chiede il valore numerico della proiezione, non il vettore proiettato).
6. Dimostrare che l'insieme di funzioni $\{1, x, |x|\}$ è linearmente indipendente in $[-1, 1]$ e costruire il corrispondente sistema ortogonale. Il dato insieme è linearmente indipendente su $[0, 1]$?
7. Determinare il valori dei coefficienti a e b che rendono la funzione $x^2 + ax + b$ ortogonale sia a $x + 1$ sia a $x - 1$ su $[0, 1]$.
8. Determinare quali delle seguenti funzioni appartiene a $L^2(0, \infty)$ e calcolare la sua norma:
 - (i) e^{-x}
 - (ii) $\sin x$
 - (iii) $1/(1 + x)$
 - (iv) $1/(\sqrt[3]{x})$
9. Determinare i valori reali di α per cui x^α è in $L^2(0, 1)$.

10. Determinare i valori reali di α per cui x^α è in $L^2(1, \infty)$.
11. Assumendo che l'intervallo (a, b) sia finito, dimostrare che se $f \in L^2(a, b)$ allora l'integrale $\int_a^b |f(x)| dx$ esiste. Mostrare che l'inverso è falso dando l'esempio di una funzione f tale che $|f|$ è integrabile su (a, b) , ma $f \notin L^2(a, b)$.
12. In $L^2(-\pi, \pi)$ esprimere la funzione $\sin^3(x)$ come combinazione lineare delle funzioni del sistema trigonometrico $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$
13. Dato $\rho(x) = e^{-x}$, dimostrare che ogni polinomio in x appartiene a $L^2_\rho(0, \infty) \equiv L^2((0, \infty), \rho dx)$, cioè lo spazio delle funzioni tali che

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 \rho(x) dx < \infty$$

14. Determinare, se esiste, il limite in L^2 delle seguenti successioni
- (i) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, per $0 \leq x \leq 1$
- (ii) $f_n(x) = nx$, per $0 \leq x < 1/n$, $f_n(x) = 1$ per $1/n \leq x \leq 1$
- (iii) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, per $0 \leq x \leq 1$.
15. Determinare i coefficienti c_i nella combinazione lineare

$$c_1 + c_2 \sin \pi x + c_3 \sin 2\pi x$$

che danno la migliore approssimazione in $L^2(0, 2)$ della funzione $f(x) = x$, $0 < x < 2$.

16. Determinare i coefficienti a_i e b_i nella combinazione lineare

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$$

che danno la migliore approssimazione in $L^2(-\pi, \pi)$ di $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

17. Si definisca una successione $\{a_n\}$ di numeri reali tali che $\sum_n a_n^2$ converge ma $\sum_n a_n$ diverge. Che tipo di convergenza può avere la serie $\sum_n a_n \cos nx$, $-\pi \leq x \leq \pi$?

SERIE DI FOURIER

Esercizi di calcolo sono stati assegnati nel foglio 15.2. Per riepilogo, vengono qui assegnati anche degli esercizi teorici che permettono di approfondire aspetti dell'analisi di Fourier che a lezione non hanno trovato lo spazio che meritano.

Notazione. Quando associamo una serie di Fourier ad una funzione senza preoccuparci del tipo di convergenza useremo il simbolo “ \sim ” invece del simbolo “ $=$ ” e quindi scriveremo

$$f(x) \sim \sum c_n e^{-inx}$$

per denotare che la serie $\sum c_n e^{-inx}$ è associata alla funzione $f(x)$.

1. Sia H la funzione scalino di Heaviside, $-\pi \leq x \leq \pi$,

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Calcolare

$$H(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2\ell+1)ix}}{2\ell+1}$$

2. Mostrare che

$$H(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots \right]$$

3. Sia $f(x) = e^{ax}$, $-\pi \leq x \leq \pi$. Calcolare

$$e^{ax} \sim \frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n (a + in)}{a^2 + n^2} e^{inx}$$

4. Usando metodi algebrici (progressioni geometriche), calcolare

$$D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{inx} = \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) x \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} x \right)}$$

5. Calcolare la serie di Fourier della funzione $\frac{1}{2}x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$, senza calcolare esplicitamente le sue coordinate di Fourier, ma sfruttando il fatto che

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

6. Si consideri la formula dell'esercizio precedente per x e si derivi membro a membro. Si ottiene

$$1 \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos nx = 2 \cos x - 2 \cos 2x + 2 \cos 3x - \cos 4x + \dots, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

E il secondo membro non è di certo 1: lo sviluppo di Fourier di 1 contiene un solo termine, 1 appunto (perché?). Spiegare il paradosso.

7. Dimostrare che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = \tilde{\delta}(x)$$

dove $\tilde{\delta}(x)$ l'estensione periodica, di periodo 2π , della δ di Dirac, cioè

$$\tilde{\delta}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

8. Mostrare che la serie di Fourier associata a $\tilde{\delta}(x)$ è

$$\tilde{\delta}(x) \sim \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} [\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots]$$

- **Derivata della funzione di Heaviside.** Si abbandoni per un attimo il mondo delle funzioni periodiche e si ritorni al mondo delle funzioni non periodiche sulla retta reale. Si ritorni, in particolare, al mondo delle funzioni generalizzate della lezione 9.2.

Si consideri la seguente definizione: *la derivata di una funzione generalizzata è definita dalla successione delle derivate della successione regolare di funzioni buone che la definisce.* In altre parole, se la successione regolare $\{f_n\}$ definisce la funzione generalizzata f mediante il processo di limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) F(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F(x) dx,$$

per ogni funzione buona F , allora la derivata f' della funzione generalizzata f è definita dal processo di limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f'_n(x) F(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) F(x) dx$$

9. Sulla base di quanto è stato appena detto, calcolare la derivata della funzione di Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Naturalmente, prima dovete trovare una successione regolare che definisca la funzione di Heaviside (Aiuto: si dia un'occhiata alle note della lezione 16.1).

10. Si derivi la serie associata ad $H(x)$ data dall'esercizio 2 e si osservi che non coincide con la serie associata alla delta dell'esercizio 8. Si spieghi l'incongruenza tra questo fatto e quanto ottenuto nell'esercizio precedente.

- **Test di Weierstrass.** Nel seguito considereremo esercizi che hanno a che fare con la convergenza uniforme. Ricordiamo il test di Weierstrass, utilizzato anche nella parte del corso di analisi complessa):

Teorema 1 (Test di Weierstrass). *Sia $I \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che le funzioni $f_n(x)$ sono limitate da*

$$|f_n(x)| \leq m_n \quad \text{per tutti gli } x \in I$$

dove le m_n sono delle costanti positive fissate. Se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_k < \infty$$

converge, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$$

converge uniformemente e assolutamente a una funzione $f(x)$ per tutti gli $x \in I$. In particolare, se le funzioni $f_n(x)$ sono continue, così è la loro somma $f(x)$.

Ricordiamo inoltre il seguente teorema di analisi:

Teorema 2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = g(x)$ è una serie uniformemente convergente, allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ è uniformemente convergente e, inoltre, $f'(x) = g(x)$.

11. Dimostrare il seguente teorema:

Teorema 3. Se le coordinate di Fourier $\hat{f}(n)$ di una funzione f soddisfano

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$$

allora la serie di Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$

converge uniformemente ad una funzione continua \tilde{f} che ha le stesse coordinate di Fourier di f .

12. Dimostrare il seguente teorema:

Teorema 4. Se le coordinate di Fourier $\hat{f}(n)$ di una funzione f soddisfano

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^\alpha} \quad \text{per tutti gli } |n| \gg 0$$

per qualche potenza $\alpha > 1$ e qualche costante positiva C allora la serie di Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$

converge uniformemente ad una funzione continua.

N.B. Questo non è in contraddizione con quanto visto a lezione: il controesempio della lezione 16.1.5 è infatti per $\alpha = 1$.

13. Dimostrare il seguente teorema:

Teorema 5. Se le coordinate di Fourier $\hat{f}(n)$ di una funzione f soddisfano

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^p |\hat{f}(n)| < \infty$$

allora la serie di Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$

converge uniformemente ad una funzione di classe C^p , cioè periodica di periodo 2π , continua e con derivate prima, seconda, ..., p -esima continue.

14. Dimostrare il seguente teorema:

Teorema 6. Se le coordinate di Fourier $\widehat{f}(n)$ di una funzione f soddisfano

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^\alpha} \quad \text{per tutti gli } |n| \gg 0$$

per qualche potenza $\alpha > p + 1$ e qualche costante positiva C allora la serie di Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$$

converge uniformemente ad una funzione di classe C^p .

15. Dimostrare il seguente teorema:

Teorema 7. La somma parziale $S_N(f)$ è il polinomio trigonometrico che approssima meglio, nel senso dei minimi quadrati, la funzione $f \in L^2$, nel senso che minimizza la distanza

$$\|f - p_N\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - p_N|^2 dx$$

tra f e il polinomio trigonometrico

$$p_N = \sum_{n=-N}^N a_n e^{inx}$$

NOTE

1. Quel che il teorema 3 non garantisce è che la funzione originale $f(x)$ che è stata usata per calcolare le coordinate di Fourier $\widehat{f}(n)$ sia la stessa funzione $\tilde{f}(x)$ ottenuta per sintesi sommando la serie di Fourier. Le due funzioni $f(x)$ e $\tilde{f}(x)$ hanno gli stessi valori eccetto, eventualmente, un insieme di misura nulla di punti. Le serie di Fourier convergenti selezionano dunque una funzione particolare nella classe di equivalenza di funzione periodiche che differiscono su un insieme di misura nulla.
2. Un teorema che in classe non abbiamo reso esplicito, ma che abbiamo usato implicitamente nella discussione sul fenomeno di Gibbs è il seguente:

Teorema. Sia $f(x)$ periodica di periodo 2π continua con derivata continua, eccetto eventualmente un numero finito di punti. Allora, se $f(x)$ è continua in (a, b) , la sua serie di Fourier converge uniformemente a $f(x)$ in ogni sotto-intervallo chiuso di (a, b) .

Non chiediamo la dimostrazione di questo teorema come esercizio (chi volesse, però, si faccia pure avanti). Tuttavia, vorremmo che lo si tenesse presente nella discussione del fenomeno di Gibbs. È buona cosa sapere che in ogni sotto-intervallo chiuso che non contenga i punti di discontinuità, la convergenza è in effetti uniforme e che questo può essere rigorosamente dimostrato.

COMPLEMENTI: METODO DELLA SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

Metodo delle separazioni delle variabili per risolvere problemi al contorno: vista la sua importanza, e non sapendo se è stato già spiegato in altri corsi, rendiamo espliciti tutti i passaggi della lezione 17.2.5 (che sono in effetti tutti i passaggi che Fourier fece nella sua memoria del 1807).

1. È dato il problema al contorno

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{per } 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{per } 0 \leq x \leq L \\ u(x, t) & \text{è una funzione limitata di } t \end{array} \right.$$

L'ultima condizione è posta avendo in mente le applicazioni alla fisica in cui u è una temperatura: cerchiamo una soluzione che non esploda quando $t \rightarrow \infty$ (il che corrisponderebbe ad una produzione illimitata di energia).

2. Quando un'equazione alle derivate parziali è lineare e omogenea, un metodo efficace per trovare una soluzione è il metodo di Bernoulli di separazione delle variabili. Questo metodo è basato sull'assunzione che una soluzione $u(x, t)$ può essere espressa come il prodotto di una funzione solo di x per una funzione solo di t . Si cerca cioè una soluzione del tipo

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Una soluzione di questo tipo è certamente molto particolare, tuttavia, questa mancanza di generalità del metodo all'*inizio* è compensata alla *fine* dal prendere tutte le combinazioni lineari di soluzioni della forma $X(x)T(t)$. Si vedano i commenti nell'ultimo punto.

3. Si sostituisca $u(x, t) = X(x)T(t)$ nell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Si trova

$$X(x)T'(t) = \kappa X''(x)T(t)$$

Dividendo per $\kappa X(x)T(t)$, si ottiene

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\kappa T(t)}$$

Questa equazione non può essere verificata a meno che ciascun membro dell'equazione sia una costante indipendente da x e t . Chiamiamo $-\lambda^2$ questa costante. La ragione per scegliere la costante $-\lambda^2$ invece di λ verrà chiarita sotto.

4. L'equazione alle derivate parziali si separa in due equazioni ordinarie

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T' + \lambda^2 \kappa T = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} X = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x \\ T = c e^{-\lambda^2 \kappa t} \end{cases}$$

dove a, b, c sono costanti di integrazione. Risulta chiarito perché abbiamo scelto $-\lambda^2$: una costante positiva avrebbe implicato una crescita esponenziale nel tempo della soluzione, che non vogliamo (la scelta del quadrato invece è pura comodità: non volevamo scrivere ogni volta una radice quadrata). Poiché le soluzioni dipendono dal parametro λ (per il momento arbitrario), mettiamo in evidenza questo fatto e scriviamo

$$u_\lambda(x, t) = (a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \kappa t},$$

avendo assorbito, senza perdita di generalità, la costante c in a e b .

5. **Imponiamo le condizioni al contorno.** La condizione al contorno $u(0, t) = 0$ per tutti i $t \geq 0$ implica

$$u_\lambda(0, t) = a_\lambda e^{-\lambda^2 \kappa t} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

da cui concludiamo che $a_\lambda = 0$. La condizione al contorno $u(L, t) = 0$ per tutti i $t \geq 0$ implica

$$u_\lambda(L, t) = b_\lambda \sin(\lambda L) e^{-\lambda^2 \kappa t} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

$b_\lambda = 0$ fornisce la soluzione banale $u = 0$, che è poco interessante. Altre soluzioni (più interessanti) sono ottenute richiedendo che

$$\sin(\lambda L) = 0$$

per cui λL deve essere un multiplo intero di π , cioè

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Si osservi che abbiamo tenuto solo i valori positivi di n , perché i valori negativi hanno l'effetto di cambiare il segno di $\sin \lambda_n x$ e possono quindi essere accomodati dalle costanti $b_{\lambda_n} = b_n$. Il caso $n = 0$ fornisce la soluzione banale $u = 0$.

Eravamo partiti col cercare una soluzione, ne troviamo una successione

$$u_n(x, t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-(n\pi/L)^2 \kappa t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

6. **Uso del principio di sovrapposizione.** Le equazioni

$$(\star) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

sono lineari e omogenee, quindi una sovrapposizione lineare delle soluzioni u_n è ancora una soluzione. In altre parole, la somma formale

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-(n\pi/L)^2 \kappa t}$$

è una soluzione delle equazioni (\star) più generale delle singole soluzioni u_n .

7. **Imponiamo che sia soddisfatta la condizione iniziale.** Richiediamo che valga $u(x, 0) = f(x)$:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Riconosciamo lo sviluppo di Fourier dell'estensione dispari di $f(x)$ a $[-L, L]$. A seconda di quali siano le proprietà di $f(x)$ possiamo dare un senso preciso all'uguaglianza precedente. Per esempio, se $f(x)$ è continua con derivata prima continua, abbiamo convergenza uniforme. Se la funzione è liscia, eccetto per un numero finito di discontinuità, possiamo applicare il teorema di Dirchelet e concludere che si ha convergenza puntuale (e uniforme in ogni sotto-intervallo chiuso che non contiene le discontinuità, sulla base del teorema nella nota 2 sopra) e convergenza alla media dei limiti destro e sinistro nei punti di discontinuità. Queste proprietà sono conservate nel corso del tempo, in quanto le coordinate di Fourier di $u = u(x, t)$ sono

$$\widehat{u}(n) = b_n e^{-(n\pi/L)^2 \kappa t}$$

8. **Morale.** Per quanto l'assunzione iniziale $u(x, t) = X(x)T(t)$ fosse molto particolare, recuperiamo completa generalità in quanto il sistema ortonormale $\{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\}$ è una base ortonormale in $L^2(0, L)$ e quindi genera tutto lo spazio.

ESERCIZI SUL METODO DELLA SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

1. Usare il metodo di separazione delle variabili per risolvere

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{per } 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{per } t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin^3 x & \text{per } 0 \leq x \leq \pi \\ u(x, t) & \text{è una funzione limitata di } t \end{array} \right.$$

2. Usare il metodo di separazione delle variabili per risolvere il problema al contorno per $u = u(x, t)$, funzione limitata di t ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{per } 0 < x < 3, t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0 \quad \text{per } t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2} - \sin \frac{5\pi x}{6} \end{array} \right.$$

(la condizione $\frac{\partial u}{\partial x}(3, t) = 0$ significa che nel suo estremo destro la sbarra è termicamente isolata e non c'è flusso di calore).

3. Usare il metodo di separazione delle variabili per risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{per } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ u(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = 0 \quad \text{per } 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = 0 \quad u(x, 1) = \sin \frac{3\pi}{2}x \end{array} \right.$$