

ESERCIZI DI RIEPILOGO 2: SOLUZIONI  
( VERIFICA DI ANALISI FUNZIONALE E SERIE DI FOURIER)

SPAZI VETTORIALI E FUNZIONALI

1. Risposte:
  - (a) Spazio vettoriale complesso.
  - (b) Spazio vettoriale reale.
  - (c) Non è uno spazio vettoriale.
  - (d) Spazio vettoriale reale.
2. Assumere che i numeri sono differenti e mostrare che questo porta ad una contraddizione. La parola chiave è “linearmente indipendenti”.
3. Usare l’uguaglianza  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$ . Si consideri  $\mathbf{u} = (1, 1)$  e  $\mathbf{v} = (i, i)$ .
4. Risposte:
  - (a) 0.
  - (b)  $2/3$ .
  - (c)  $8/3$
  - (d)  $\sqrt{14}$
5. La proiezione ortogonale del vettore  $f$  lungo  $f_i$  è il vettore

$$\frac{|f_i\rangle\langle f_i|}{\langle f_i | f_i \rangle} |f\rangle = |f_i\rangle \frac{\langle f_i | f \rangle}{\|f_i\|^2} = \frac{|f_i\rangle}{\|f_i\|} \frac{\langle f_i | f \rangle}{\|f_i\|}$$

e valore numerico della proiezione è

$$c_i = \frac{\langle f_i | f \rangle}{\|f_i\|}.$$

Si ha  $c_1 = \sqrt{\pi/2}$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = \sqrt{\pi}/2$ .

6. No, perché  $|x| = x$  su  $[0, 1]$ .
7.  $a = -1$ ,  $b = 1/6$ .
8. Risposte
  - (i)  $1/\sqrt{2}$
  - (ii) non in  $L^2$
  - (iii) 1
  - (iv) non in  $L^2$
9.  $\alpha > -1/2$
10.  $\alpha < -1/2$
11. Usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  in  $(0, 1]$
12.  $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$
13. Usare il fatto che per ogni polinomio  $p$ ,  $p(x)e^{-x} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \infty$ .
14. Risposte:
  - (i) 1
  - (ii) 1

(iii) 0

15.  $c_1 = 1, c_2 = -2/\pi, c_3 = -1/\pi$ .16.  $a_0 = \pi/2, a_1 = 4/\pi, a_2 = 0, b_1 = 0, b_2 = 0$ .17.  $a_n = 1/n$ . Convergenza  $L^2$ 

## SERIE DI FOURIER

1. Si ha

$$\widehat{H}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(x) e^{-inx} dx = \int_0^1 e^{-inx} dx = \begin{cases} 1/2 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ 1/(in\pi) & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

2. Elementare, dall'esercizio precedente.

3. Si ha

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-in)x} dx \\ &= \frac{e^{(a-in)x}}{2\pi(a-in)} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{(a-in)\pi} - e^{-(a-in)\pi}}{2\pi(a-in)} \\ &= (-1)^n \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{2\pi(a-in)} \\ &= \frac{(-1)^n (a+in) \sinh a\pi}{\pi(a^2 + n^2)} \end{aligned}$$

4. Ricordando la (solita) formula per la progressione geometrica

$$\sum_{n=0}^m r^n = \frac{r^{m+1} - 1}{r - 1}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
 D_N(x) &= \sum_{|n| \leq N} e^{inx} \\
 &= e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N+1} e^{inx} \\
 &= e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\
 &= \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} \\
 &= \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\
 &= \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right]}{\sin \left( \frac{1}{2} x \right)}
 \end{aligned}$$

5. Integrando membro a membro la serie di Fourier di  $x$ , si ottiene

$$\frac{1}{2}x^2 \sim -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nx + \text{costante}$$

La costante è determinata dall'essere (sempre) la media della funzione

$$\text{costante} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{\pi^2}{6}$$

6. La serie di Fourier

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

non converge a  $x$ , piuttosto alla sua estensione periodica  $\tilde{f}(x)$ , che ha una discontinuità a salto nei multipli dispari di  $\pi$ . Per essere derivabile, la funzione deve essere almeno continua. Se poi ha derivata prima continua è di certo derivabile (come si è visto a lezione).

**Nota.** Si può tuttavia assegnare un'interpretazione alla serie derivata. Si può dimostrare che  $\tilde{f}'(x)$  non è uguale alla funzione 1, ma una funzione delta concentrata ad ogni discontinuità di salto:

$$\tilde{f}'(x) = 1 - 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[x - (2n+1)\pi]$$

7. Sia  $f(x)$  una funzione buona periodica di periodo  $2\pi$ . Con buona qui intendiamo derivabile quante volte si vuole. Allora, per quanto visto nella lezione 17.1.2

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y)f(y)dy = f(x)$$

Quindi  $D_N(x)$  è un approssimante di una funzione generalizzata, nel senso che il processo di limite dell'equazione precedente definisce la funzione generalizzata

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\delta}(x-y)f(y)dy = f(x)$$

che è esattamente come la delta di Dirac in  $\pi \leq x \leq \pi$ . Essendo  $D_N(x)$  periodica di periodo  $2\pi$ , nel limite  $N \rightarrow \infty$  si ottiene l'estensione periodica della delta, cioè

$$\tilde{\delta}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

8. Elementare. Segue immediatamente dal precedente esercizio.  
9. L'esempio 1 della lezione 16.1.2 fornisce

$$H \star \delta_n(x) = -\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{y=x}^{-\infty} e^{-nu^2} du = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-nu^2} du$$

come approssimanti lisce dello scalino. Le funzioni

$$H_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-nu^2} du$$

sono buone, come si verifica facilmente e formano una successione regolare che converge allo scalino, nel senso del processo di limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)F(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x)F(x)dx,$$

(una volta stabilito che il limite esiste, cioè che la successione è regolare: verificare). A questo punto dovrebbe essere chiaro che abbiamo dimostrato che la derivata della delta di Dirac è la funzione di Heaviside, in quanto

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$$

che sono proprio una successione regolare che definisce la delta di Dirac.

10. In effetti, la derivata della serie associata a  $H(x)$ , ottenuta dall'esercizio 2, è

$$H'(x) \sim \frac{2}{\pi} [\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots]$$

mentre dall'esercizio 8 abbiamo

$$\tilde{\delta}(x) \sim \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} [\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots]$$

Il paradosso è analogo a quello incontrato nell'esercizio 6. È una questione di estensione periodica a tutta la retta reale di quanto vale in  $[-\pi, \pi]$ . L'estensione periodica di  $H(x)$  ha due discontinuità di salto, di valore  $+1$  in tutti i multipli pari di  $\pi$  (da 0 a 1) e di valore  $-1$  in tutti i multipli dispari di  $\pi$  (da 1 a 0). Quindi la sua derivata è la differenza tra l'estensione periodica della delta in 0 e l'estensione periodica della delta in  $\pi$ , cioè

$$\tilde{\delta}(x) - \tilde{\delta}(x - \pi)$$

Ora, come si calcola facilmente,

$$\tilde{\delta}(x - \pi) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} [-\cos x + \cos 2x - \cos 3x + \dots]$$

e quindi

$$\tilde{\delta}(x) - \tilde{\delta}(x - \pi) \sim \frac{2}{\pi} [\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots]$$

che è proprio l'espressione di  $H'(x)$  da cui siamo partiti.

11. Poiché

$$|\widehat{f}(n)e^{inx}| \leq |\widehat{f}(n)|,$$

convergenza uniforme e continuità della funzione limite seguono dal Test di Weierstrass (teorema 1). Per mostrare che le coordinate di Fourier della funzione limite sono le stesse di quelle della funzione  $f$ , si moltiplichi la serie di Fourier per  $e^{imx}$  e si integri termine a termine tra  $-\pi$  e  $\pi$ . Questa operazione è lecita grazie alla convergenza uniforme della serie.

12. Conseguenza immediata del Test di Weierstrass (teorema 1).

13. Questo teorema è immediata conseguenza del teorema 2<sup>1</sup>, combinato con il teorema 4 dimostrato nell'esercizio precedente. L'applicazione del Test di Weierstrass alla serie derivata

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)(in)e^{inx}$$

basata sull'ipotesi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^p |\widehat{f}(n)| < \infty$$

permette di completare la dimostrazione del teorema (si incominci con  $p = 1$ , per semplicità).

14. Conseguenza immediata del teorema precedente.

15. Adattare la dimostrazione della lezione 15.1.2 allo spazio di Hilbert  $L^2(-\pi, \pi)$  e alla base ortonormale  $\{e^{inx}\}$ .

#### ESERCIZI SUL METODO DELLA SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

<sup>1</sup>Se  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = g(x)$  è una serie uniformemente convergente, allora anche  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$  è uniformemente convergente e, inoltre,  $f'(x) = g(x)$ .

1.

$$u(x, t) = \frac{3}{4}e^{-t} \sin x - \frac{1}{4}e^{-9t} \sin 3x$$

2.

$$u(x, t) = e^{-\kappa\pi^2 t/4} \sin \frac{\pi x}{2} - e^{-25\kappa\pi^2 t/36} \sin \frac{5\pi x}{6}$$

3.

$$u(x, t) = \left( \sinh \frac{3\pi}{2} \right)^{-1} \sin \frac{3\pi}{2} x \sinh \frac{3\pi}{2} y$$