

18.2

1. Dimostrare la **relazione di reciprocità**: Se la trasformata di Fourier di $f(x)$ è $\widehat{f}(y)$, allora la trasformata di Fourier di $\widehat{f}(x)$ è $f(-y)$ ¹, cioè

$$F^2 = \mathcal{I},$$

dove $\mathcal{I}f(x) = f(-x)$.

[Aiuto: immediata conseguenza di quanto visto in classe.]

2. Dimostrare che :
- f è pari se e solo se $F^2f = f$.
 - f è dispari se e solo se $F^2f = -f$.
 - $F^4f = f$ per ogni funzione f (su cui F è definita).
3. Dimostrare che la trasformata di Fourier di una funzione reale pari è reale.
4. Dimostrare che la trasformata di Fourier di una funzione reale dispari è immaginaria.
5. Dimostrare che la trasformata di Fourier di una funzione pari è pari e di una funzione dispari è dispari.
6. Calcolare la trasformata di Fourier dell'impulso rettangolare (o funzione di scatola)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\left[\text{Resp.: } \textcircled{2} \widehat{f}(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega} \right]$$

7. Usare la relazione di reciprocità e l'esercizio precedente per calcolare la trasformata di Fourier $\textcircled{3}$ di

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}$$

8. Usare l'esercizio precedente per mostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega \cos \omega}{\omega} = \frac{\pi}{4}$$

9. Usare i due esercizi precedenti per mostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} = \frac{\pi}{2}$$

10. Calcolare la trasformata di Fourier $\textcircled{3}$ di

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\left[\text{Resp.: } \widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ak}{k} \right]$$

¹Vale per $\textcircled{1}$ e $\textcircled{3}$, con la convenzione $\textcircled{2}$ occorre dividere per 2π .

11. Mostrare che

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

12. Calcolare la trasformata di Fourier ② di $f(x) = e^{-|a|x}$ [Aiuto: usare esercizio (6) del foglio di esercizi 7.2 e il principio di simmetria.] 

correzione del
testo: vedere
soluzioni

13. Sia $a > 0$. Derivare la formula

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{a^2 + \omega^2} d\omega \quad (x \geq 0)$$

[Aiuto: usare esercizio precedente.]

14. Si consideri la **funzione segno** $\text{sgn}(x)$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e si stabilisca l'identità

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt = \text{sgn}(x)$$

15. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\left[\text{Resp.: } \textcircled{3} \hat{f}(k) = \frac{1 - ik}{\sqrt{2\pi}(1 + k^2)} \right]$$

16. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{|x|}{2}\right) & \text{se } |x| < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\left[\text{Resp.: } \textcircled{3} \hat{f}(k) = \frac{2 \sin^2 k}{\pi k^2} \right]$$

17. Sia f l'impulso rettangolare

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare la trasformata di Fourier di $g = f \star f$.

$$\left[\text{Resp.: } \textcircled{3} \hat{g}(k) = \frac{2 \sin^2 k}{\pi k^2} \right]$$

18. Se f è l'impulso rettangolare dell'esercizio precedente, calcolare $f \star f(x)$.

$$\left[\text{Aiuto: usare l'esercizio 16.} \right]$$

Negli esercizi da 19 a 28 usare, eventualmente, il principio di reciprocità e le proprietà della trasformata di Fourier (che cosa diventano nel dominio delle frequenze operazioni come derivate, traslazione, cambiamento di scala etc.) per ricondursi ad trasformate note e calcolare $\widehat{f}(k)$:

19. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
20. $f(x) = \frac{a-ix}{a^2+x^2}$
21. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
22. $f(x) = e^{-x^2}$
23. $f(x) = e^{-2x^2}$
24. $f(x) = e^{-2x^2+2x}$
25. $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2+2}$
26. $f(x) = xe^{-x^2}$
27. $f(x) = x^2e^{-|x|}$
28. $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$
29. Si supponga che f sia una funzione integrabile e pari, e sia $g(x) = \sin ax$. Dimostrare che per tutti i numeri reali a ,

$$f \star g(x) = \sin(ax)\widehat{f}(a)$$

30. Sia $f(x) = xe^{-x^2/2}$ e $g(x) = e^{-x^2}$.
 - (a) Quali sono le trasformate di Fourier di f e g ?
 - (b) Qual è la trasformata di Fourier di $f \star g$?
 - (c) Che cos'è $f \star g$?
31. Dimostrare che per funzioni buone f e g si ha

$$\frac{d^n}{dx^n} f \star g = \frac{d^\nu f}{dx^\nu} \star \frac{d^\mu g}{dx^\mu}$$

per ogni coppia di interi non negativi tali che $\mu + \nu = n$.

32. Dimostrare che se f e g sono L^1 anche $f \star g$ è L^1 .
33. Dimostrare che se f è L^1 allora \widehat{f} è limitata, cioè $\widehat{f}(k) \leq M$ per tutti i k . Qual è il valore più piccolo di M ?
34. Siano

$$\phi_n(x) = \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2}$$

le funzioni (non normalizzate) di Hermite. Dimostrare che²

$$\widehat{\phi}_n(k) = (-1)^n i^n \phi_n(k).$$

²Usando la convenzione ③ per la trasformata di Fourier.