

SOLUZIONI 18.2

1 Usiamo la convenzione ③

$$Ff(k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

$$F^{-1}\hat{f}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk$$

Allora

$$Ff(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iyx} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{iy(-x)} dy$$

$$= F^{-1}f(-x)$$

Quindi

$$F^2f = FF^{-1}f(-x) = f(-x)$$

2

- (a) f pari significa $f(-x) = f(x)$. Se f è pari allora $F^2f = f(-x) = f(x)$. Se $F^2f(x) = f(x)$ allora $f(x) = f(-x)$.
- (b) f dispari significa $f(-x) = -f(x)$. Come prima, $F^2f(x) = -f(x)$.
- (c) $f = f_P + f_D$ (qualunque funzione è decomponibile nella somma di una funzione pari e una dispari). Allora

$$F^4f = F^4(f_P + f_D) = F^2(F^2f_P + F^2f_D) = F^2(f_P - f_D) = f_P + f_D = f$$

3

$$\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}e^{ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

4

$$\begin{aligned} \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)e^{-ikx}} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ikx} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx \\ &= \widehat{f}(-k) \end{aligned}$$

6

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 e^{-ix} dx = \left. \frac{e^{-ix}}{-ik} \right|_{-1}^1 = \frac{e^{ik} - e^{-ik}}{ik} = 2 \frac{\sin k}{k}$$

da cui ③

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \frac{\sin k}{k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k}$$

7

Se

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \xrightarrow{F} \quad \widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ak}{k}$$

allora, per la relazione di reciprocità,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x} \xrightarrow{F} \hat{f}(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } |k| < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

8 $k = 1$ è una discontinuità: regola dell'1/2 della somma di limite destro e sinistro.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} (\cos kx + i \sin kx) dx \Big|_{k=1} &= \frac{1+0}{2} \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx &= \frac{1}{2} \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

9 Si usi integrazione per parti e esercizio precedente.

10 Già calcolato sopra.

11 Si usi integrazione per parti e esercizi precedenti.

12 Correzione del testo: “Calcolare la trasformata di Fourier ^② della funzione $f(x) = e^{-a|x|}$ dove $a > 0$ ”. Risposta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} = \frac{2a}{a^2 + k^2}$$

13 Dall'esercizio precedente segue che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + k^2} e^{ikx} dk = e^{-a|x|}$$

ovvero

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{a^2 + k^2} dk, \quad x > 0$$

che è quanto si chiedeva di dimostrare.

14 In primo luogo si osservi che

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin k}{k} dk = \frac{\pi}{2}.$$

Questo integrale può essere calcolato con i metodi dell'analisi complessa oppure essere ottenuto come conseguenza del fatto che

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k} e^{ikx} dk = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(esercizio 6). Ponendo $x = 0$ si ottiene

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin k}{k} = 1$$

da cui segue il risultato desiderato. Adesso si effettui nell'integrale il cambiamento di variabili $xt = u$ e si osservi che, per $x > 0$,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = 1$$

e per $x < 0$,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = -1$$

che è quanto si voleva dimostrare.

15 Valgono le risposte e/o aiuti dati nel testo.

16 Valgono le risposte e/o aiuti dati nel testo.

17 Valgono le risposte e/o aiuti dati nel testo.

18 Valgono le risposte e/o aiuti dati nel testo.

19

20

Esercizio 6 del foglio 7.2 (da ricordare a memoria):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|k|}$$

Dunque, con la convenzione ③

$$\widehat{f}(k) = F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$$

21

$$g(x) = \frac{a-ix}{a^2+x^2} = \frac{a-ix}{(a+ix)(a-ix)} = \frac{1}{a+ix} = \frac{-i}{x-ia}$$

$$F\left(\frac{1}{a+ix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ie^{-ikx}}{x-ia} dx$$

Metodo dei residui: polo semplice in $x = ia$. Per $k > 0$, chiusura nel semipiano inferiore,

$$F\left(\frac{-i}{x-ia}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

Per $k < 0$, chiusura nel semipiano superiore,

$$\widehat{g}(k) = F\left(\frac{-i}{x-ia}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2\pi i)(-i)e^{ak} = \sqrt{2\pi} e^{ak}$$

Quindi

$$\frac{a-ix}{a^2+x^2} \xrightarrow{F} \begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{ak} & \text{se } k < 0 \\ 0 & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

Per $k = 0$, regola dell'1/2:

$$\widehat{g}(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

22

Integrale di Fourier della gaussiana (da ricordare a memoria):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{1}{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

per $a = 1$ si ha la risposta al quesito,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2}{4}}.$$

23 $a = 2$ della formula dell'esercizio precedente,

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{k^2}{8}}.$$

24 Completare i quadrati

$$e^{-2x^2+2x} = e^{-2(x^2+x+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}} = e^{-2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}$$

e usare la proprietà di traslazione della trasformata di Fourier.

25 Banale.

26 Si derivi membro a membro rispetto a k :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-\frac{k^2}{4}}$$

Allora

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2k}{4}\right) e^{-\frac{k^2}{4}},$$

da cui

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{-i}{2\sqrt{2}} k e^{-\frac{k^2}{4}}$$

27 Come nell'esercizio precedente, usando adesso quanto ottenuto nell'esercizio 12:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} = \frac{2a}{a^2 + k^2}$$

28 Risposta:

$$(1 - ik)e^{-\frac{k^2}{2-ik}}$$

29

N. B. Con la convenzione ③, risulta comodo definire il prodotto di convoluzione nel come

$$f \star g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du$$

L'esercizio è inteso con questa convenzione (lo stesso vale per gli esercizi seguenti).

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin(ax - au) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{e^{i(ax-au)} - e^{-i(ax-au)}}{2i} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} \left[e^{iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iau} du - e^{-iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iau} du \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2i} \left[e^{iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iau} du - e^{-iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iau} du \right] \quad (f \text{ è pari}) \\ &= \sin ax \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iau} du \end{aligned}$$

30

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= -ike^{-\frac{k^2}{2}} \\ \widehat{g}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2}{4}} \\ f \star g(x) &= \frac{2x}{3\sqrt{3}} e^{-\frac{x^2}{3}} \end{aligned}$$

31

Semplice generalizzazione di quanto visto in classe.

32

Usare Cauchy-Schwarz.

33

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-ikx}| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

34

Vedere lezione 20.1.