

19.1

Per risolvere l'equazione del calore, a lezione è stato usato lo schema

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} & \xleftarrow{\text{soluzione}} & f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_0(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dx \\ \downarrow F & & \uparrow F^{-1} \\ \frac{\partial \widehat{f}(k,t)}{\partial t} = -Dk^2 \widehat{f}(k,t) & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \widehat{f}(k,t) = \widehat{f}_0(k) e^{-Dk^2 t} \end{array}$$

Questo schema si applica pari pari ad altri problemi al contorno per altre PDE (cioè, equazioni alle derivate parziali, PDE= “partial differential equation”, terminologia standard). La caratteristica principale di questo schema è che una PDE lineare viene trasformata in una ODE (equazione alle derivate ordinarie, “ODE”= ordinary differential equation) lineare e quindi di facile soluzione. In breve, lo schema generale è

$$\begin{array}{ccc} \text{PDE lineare per } f(x,t) & \xleftarrow{\text{soluzione}} & f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k,t) dk \\ \downarrow F & & \uparrow F^{-1} \\ \text{ODE lineare per } \widehat{f}(k,t) & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \widehat{f}(k,t) \end{array}$$

Con questo metodo risolvere i seguenti problemi al contorno.

1.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = e^{-x^2} \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

5. Si assuma che $f(x)$ abbia trasformata di Fourier (per esempio, sia buona). Risolvere il problema al contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K \frac{\partial u}{\partial x} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Questo problema fornisce un modello del trasferimento di calore in una sbarra lunga e sottile che scambia calore con l'ambiente esterno. Questo fenomeno è chiamato *convezione* e K è una costante positiva chiamata *coefficiente di convezione*.

6. Si assuma che $f(x)$ abbia trasformata di Fourier (per esempio, sia buona). Risolvere il problema al contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Questa equazione è nota come *equazione di Korteweg—de Vries linearizzata*.

7. *Equazione del calore con diffusività termica non costante*. Risolvere il problema al contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = at \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Esprimere la soluzione come una convoluzione.

8. Risolvere il problema al contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = e^{-t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

9. Si risolva l'equazione del calore per una sbarra sottile infinitamente lunga di diffusività termica costante D e con distribuzione iniziale di temperatura $f(x) = T_0$ per $x > 0$ e 0 altrimenti. Si mostri che la temperatura u è data da

$$u(x, t) = \frac{T_0}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right]$$

dove

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$$

10. *Equazione del calore per una sbarra semi-infinita.* Risolvere il problema al contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \quad x > 0 \\ u(0, t) = 0 \quad t > 0 \end{array} \right.$$