

SOLUZIONI 20.1

1

Richiamiamo il dizionario di traduzione:

$$\begin{aligned}
 Y(x) &\longrightarrow \widehat{Y}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x)e^{-ikx} dx \\
 \frac{d}{dx}Y(x) &\longrightarrow ik\widehat{Y}(k) && (D \rightarrow iQ) \\
 \frac{d^2}{dx^2}Y(x) &\longrightarrow -k^2\widehat{Y}(k) && (D^2 \rightarrow -Q^2) \\
 xY(x) &\longrightarrow i\frac{d}{dk}\widehat{Y}(k) && (Q \rightarrow iD) \\
 \widehat{Y}(k) &\longrightarrow Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{Y}(k)e^{ikx} dk
 \end{aligned}$$

Dunque

$$Y''(x) + Y'(x) + xY(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad -k^2\widehat{Y} + ik\widehat{Y} + i\frac{d}{dk}\widehat{Y} = 0$$

Occorre quindi risolvere la ODE

$$\frac{d\widehat{Y}}{dk} = -(ik^2 + k)\widehat{Y}$$

Questa equazione è del prim'ordine e le variabili sono separabili, per cui

$$\int \frac{d\widehat{Y}}{\widehat{Y}} = - \int (ik^2 + k)dk$$

e

$$\log \widehat{Y} = -i\frac{k^3}{3} - \frac{k^2}{2} + \log C$$

e

$$\widehat{Y}(k) = Ce^{-i(k^3/3)-(k^2/2)}$$

da cui

$$Y(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-i(k^3/3)-(k^2/2)} dk$$

Possiamo esprimere questa risposta in termini di quantità reali usando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso e ponendo per brevità $A = C\sqrt{2/\pi}$. Dopo aver osservato che l'integrale con il seno si annulla (perchè?) si arriva a

$$Y(x) = A \int_0^{\infty} \cos\left(kx - \frac{k^3}{3}\right) e^{-k^2/2} dk.$$

Era stata chiesta la soluzione generale dell'equazione. Poiché l'equazione differenziale è del secondo ordine, la soluzione deve dipendere da due costanti arbitrarie,

ma noi ne abbiamo trovato una sola. Evidentemente, il metodo della trasformata di Fourier non permette di vedere una soluzione. In effetti le cose stanno proprio così: esiste un'altra soluzione, linearmente indipendente da quella trovata, che non ha trasformata di Fourier. Passando alle trasformate di Fourier, abbiamo perso questa soluzione.

Dopo aver studiato la trasformata di Laplace (lezione 22.2) si ritorni a questo problema e lo si risolva usando il metodo della trasformata di Laplace. Si stabilisca se in questo modo si trova la soluzione mancante.

2 Passando alla trasformata di Fourier,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)du = \frac{1}{a+x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(k)^2 = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|k|}$$

Quindi

$$\hat{f}(k) = \pm \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-a|k|/2}$$

Poiché

$$e^{-A|k|} \implies \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A}{A^2 + x^2}$$

si avrà che

$$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-a|k|/2} \implies \pm \frac{1}{\sqrt{2a}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a/2}{(a/2)^2 + x^2} = \pm \sqrt{\frac{a}{\pi}} \frac{2a}{a^2 + 4x^2} = f(x)$$

3 Analogamente al precedente.

4 Analogamente agli esercizi precedenti, si perviene ad un'equazione algebrica nello spazio delle trasformate di Fourier:

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(k)^2 + 2\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$$

dove $\widehat{g}(k)$ è la trasformata di Fourier di

$$g(x) = \frac{4x^2 + 10}{\pi(x^4 + 5x^2 + 4)}$$

Risolviamo l'equazione algebrica

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2 + 2\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) = 0.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)}}{2\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)} \right]\end{aligned}$$

Calcoliamo

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^2 + 10}{\pi(x^4 + 5x^2 + 4)} e^{-ikx} dx$$

usando il metodo dei residui.

L'integrale

$$I = \frac{1}{\pi} \oint \frac{4z^2 + 10}{(z^4 + 5z^2 + 4)} e^{-ikz} dz$$

soddisfa le condizioni del lemma di Jordan. Chiudiamo nel semipiano inferiore Π^- , per $k > 0$, e nel semipiano superiore Π^+ , per $k < 0$. La funzione integranda ha 4 poli semplici in $a = \pm i$ e $a = \pm 2i$, infatti

$$\frac{4z^2 + 10}{(z^4 + 5z^2 + 4)} = \frac{4z^2 + 10}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \frac{4z^2 + 10}{(z + i)(z - i)(z + 2i)(z - 2i)}$$

Il calcolo risulta più veloce se ricordiamo l'esercizio 11 degli esercizi di riepilogo dopo la lezione 10:

$$\text{Res}(a) = \left. \frac{f(z)}{h'(z)} \right|_{z=a} = \left. \frac{(4z^2 + 10)e^{-ikz}}{4z^3 + 10z} \right|_{z=a} = \left. \frac{e^{-ikz}}{z} \right|_{z=a} = \frac{e^{-ika}}{a}$$

Allora, per $k > 0$ (ricordarsi che la chiusura di sotto cambia il verso antiorario in orario) si ha

$$I = -\frac{1}{\pi}(2\pi i) \left[\frac{e^{-ik(-i)}}{-i} + \frac{e^{-ik(-2i)}}{-2i} \right] = 2e^{-k} + e^{-2k}$$

e per $k < 0$,

$$I = \frac{1}{\pi}(2\pi i) \left[\frac{e^{-ik(i)}}{i} + \frac{e^{-ik(2i)}}{2i} \right] = 2e^k + e^{2k}$$

Ne segue che

$$I = 2e^{-|k|} + e^{-2|k|}$$

da cui

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2e^{-|k|} + e^{-2|k|})$$

Sostituiamo in $\widehat{f}(k)$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-1 \pm \sqrt{1 + (2e^{-|k|} + e^{-2|k|})} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-1 \pm \sqrt{(1 + e^{-|k|})^2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [-1 \pm (1 + e^{-|k|})] \end{aligned}$$

Otteniamo così due soluzioni dell'equazione:

$$\begin{aligned} \widehat{f}_1(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-|k|} \\ \widehat{f}_2(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-2 - e^{-|k|}) \end{aligned}$$

La soluzione 2 tuttavia non è accettabile perché non tende a zero quando $k \rightarrow \infty$ e quindi l'anti-trasformata di $\widehat{f}_2(k)$ non è definita come una funzione ordinaria (lo sarebbe, eventualmente, nel senso delle funzioni generalizzate).

In conclusione, la sola soluzione accettabile dell'equazione integrale corrisponde a $\widehat{f}_1(k)$. Poiché

$$e^{-|k|} \implies \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$$

la soluzione cercata è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

5

L'integrale in

$$\rho(x) + \int_0^{\infty} \rho(x-y)e^{-y} dy = \frac{1}{1+x^2}$$

non appare come una convoluzione perché è solo da 0 a $+\infty$ invece di essere da $-\infty$ a $+\infty$. Tuttavia possiamo sostituire il limite inferiore di integrazione con $-\infty$

se sostituiamo e^{-y} con una funzione $g(t)$ che è uguale a e^{-y} quando y è positiva e è zero quando y è negativa. Con questa sostituzione

$$\rho(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x-y)g(y)dy = \frac{1}{1+x^2}$$

Passando alla trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} \rho(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x-y)g(y)dy &= \frac{1}{1+x^2} \\ &\Downarrow \\ \widehat{\rho}(k) + \sqrt{2\pi}\widehat{\rho}(k)\widehat{g}(k) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|} \end{aligned}$$

L'equazione è facilmente risolta se calcoliamo \widehat{g} :

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iky} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y}e^{-iky} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y(1+ik)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+ik} \end{aligned}$$

Quindi

$$\left[1 + \frac{1}{1+ik}\right] \widehat{\rho}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|}$$

da cui

$$\widehat{\rho}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+ik}{2+ik}\right) e^{-|k|}$$

Trasformando indietro

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1+ik}{2+ik}\right) e^{-|k|} e^{ikx} dk \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\cos xk + \cos(xk-k) + k \sin xk}{2 + 2 \cos k + 2k \sin k + k^2} dk \end{aligned}$$

6 Trasformiamo l'equazione secondo Fourier:

$$f'(x) + f(x) + f(x+1) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\Downarrow$$
$$[ik + 1 + e^{-ik}] \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}$$

da cui

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|k|}}{(ik + 1 + e^{-ik})}$$

e quindi $f(x) \dots$