

21.2

1. Determinare la trasformata di Laplace $\tilde{f}(s)$ di ciascuna delle seguenti funzioni definite su $(0, \infty)$.

(a) $f(t) = (at + b)^2$

(b) $f(t) = \cosh t$

(c) $f(t) = \sin^2 t$

(d) $f(t) = \sin t \cos t$

(e) $f(t) = t \sinh t$

(f) $f(t) = 1/\sqrt{t}$

2. Determinare l'anti-trasformata di Laplace $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ di ciascuna delle seguenti trasformate di Laplace.

(a) $F(s) = \frac{a}{s+b}$

(b) $F(s) = \frac{2s-5}{s^2-9}$

(c) $F(s) = \frac{1}{s^2+2s}$

(d) $F(s) = \frac{1}{s^{3/2}}$

(e) $F(s) = \frac{e^{-3s} + e^{-s}}{s}$

(f) $F(s) = \ln \left(\frac{s+a}{s+b} \right)$

3. Usare la trasformata di Laplace per risolvere l'equazione integrale

$$\int_0^t (t-u)^3 Y(u) du = f(t)$$

nell'incognita Y . Stabilire quali condizioni deve soddisfare f affinché il metodo funzioni.

4. Usare la trasformata di Laplace per ottenere la soluzione dell'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad x > 0, \quad t > 0,$$

soggetta alla condizione al contorno

$$\Psi(0, t) = \cos^2 t \quad t \geq 0$$

e alle condizioni iniziali

$$\Psi(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq L$$

5. Usare l'integrazione nel piano complesso per mostrare che

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \right\} (t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/(4t)} \quad \text{per } a > 0$$