

SOLUZIONI 21.2

1

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- (a) $\frac{2a^2}{s^3} + \frac{2ab}{s^2} + \frac{b^2}{s}$
- (b) $\frac{s}{s^2 - 1}$, $\operatorname{Re}(s) > 1$
- (c) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right)$
- (d) $\frac{1}{s^2 + 4}$
- (e) $\frac{2s}{(s^2 - 1)^2}$
- (f) $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

2

- (a) ae^{-bt}
- (b) $2 \cosh 3x - \frac{5}{3} \sinh 3x$
- (c) $\frac{1}{2} (1 - e^{-2t})$
- (d) $\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
- (e) $H(x - 3) + H(x - 1)$, dove H è la funzione di Heaviside (lezione 16.1)
- (f) $\frac{1}{t} (e^{-bt} - e^{-at})$

3

Il lato sinistro dell'equazione è la convoluzione di t^3 e $Y(t)$. Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri dell'equazione a primo membro abbiamo

il prodotto delle trasformate e l'equazione diventa

$$\tilde{Y}(s) \frac{3!}{s^4} = \tilde{f}(s) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{Y}(s) = \frac{1}{6} s^4 \tilde{f}(s)$$

La moltiplicazione per s^4 è associata ad una derivata quarta rispetto al tempo. Infatti, sappiamo che se $\mathcal{L}\{f(t)\} = \tilde{f}(s)$ allora

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\tilde{f}(s) - f(0)$$

da cui

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\tilde{f}'(s) - f'(0) = s(s\tilde{f}(s) - f(0)) - f'(0) = s^2\tilde{f}(s) - sf(0) - f'(0)$$

che è la regola per la derivata seconda vista a lezione. Nello stesso modo si ottiene

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3\tilde{f}(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(4)}(t)\} = s^4\tilde{f}(s) - s^3f(0) - s^2f'(0) - sf''(0) - f'''(0)$$

⋮

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\tilde{f}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Ritornando al nostro problema, abbiamo dunque

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{6} s^4 \tilde{f}(s) = \frac{1}{6} [\mathcal{L}\{f^{(4)}(t)\} + s^3f(0) + s^2f'(0) + sf''(0) + f'''(0)]$$

Notiamo che dall'equazione

$$\int_0^t (t-u)^3 Y(u) du = f(t)$$

segue che $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ Quindi,

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{6} \mathcal{L}\{f^{(4)}(t)\}$$

ovvero

$$Y(t) = \frac{1}{6} f^{(4)}(t)$$

Il metodo funziona se f è derivabile fino al quarto ordine, che è dunque la condizione richiesta.

4

$$u(x, t) = H\left(t - \frac{x}{c}\right) \cos^2\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

5

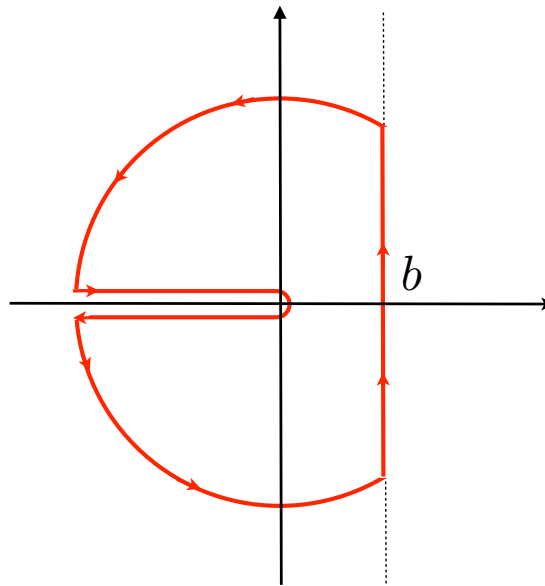
La funzione

$$\tilde{f}(s) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

è analitica nel piano complesso con un taglio lungo l'asse reale negativo. Quindi l'integrale

$$\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f})(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \tilde{f}(s)e^{st} ds$$

può essere ridotto a due integrali: uno sopra il taglio da sinistra a destra e uno sotto il taglio da destra a sinistra, come mostrato in figura:



Procedendo in questo modo si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(\tilde{f})(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \tilde{f}(s)e^{st} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(a\sqrt{s})}{\sqrt{s}} e^{-st} ds \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} \cos(au) du \end{aligned}$$

Osservando che l'ultimo integrale è la trasformata di Fourier di e^{-tu^2} (verificare!), si ottiene l'espressione desiderata per $\mathcal{L}^{-1}(\tilde{f})(t)$.