

## 2.1. Complementi sulle serie di potenze.

2.1.1. *Convergenza uniforme.* Incominciamo col risolvere l'esercizio 1(3).

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z} \quad \text{per } |z| < 1$$

Polinomio approssimante

$$P_m(z) = \sum_{j=0}^m z^j$$

(a) Errore:  $E_m(z) \equiv |P(z) - P_m(z)|$

$$E_m(z) = |P(z) - P_m(z)| = |z^{m+1} + z^{m+2} + \dots| = \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|}$$

(perché per  $S \equiv z^{m+1} + z^{m+2} + \dots$  si ha  $S = z(z^m + S)$ )

(b) Per  $|z| < 1$ ,  $E_m(z) \rightarrow 0$  per  $m \rightarrow \infty$ .

(c) Per  $m$  fissato  $E_m(z) \rightarrow \infty$  per  $z \rightarrow 1$ . Per  $|z| \rightarrow 1$ ,  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \neq 0$  si ha

$$E_m(z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}$$

(d) Per  $|z| \leq r = 0.9$

$$E_m(z) \leq \frac{r^{m+1}}{1-r} = \frac{0.9^{m+1}}{0.1} = \epsilon = 0.01 \quad \Rightarrow \quad m \approx 67$$

Nota. Abbiamo dimostrato che la serie geometrica converge uniformemente nel disco di raggio  $r$ .

□

Generica serie di potenze

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_m z^j$$

con raggio di convergenza  $R$ . Si fissi  $r < R$  e sia  $z \leq r$ .

$$E_m(z) = |P(z) - P_m(z)| = |c_{m+1}z^{m+1} + c_{m+2}z^{m+2} + \dots| \leq |c_{m+1}z^{m+1}| + |c_{m+2}z^{m+2}| + \dots$$

Da cui

$$E_m(z) \leq |c_{m+1}|r^{m+1} + |c_{m+2}|r^{m+2} + \dots \equiv e(m, r)$$

Per ogni  $\epsilon$  esiste un  $m$  a partire dal quale  $e(m, r) < \epsilon$ . Quindi, a partire da tale  $m$ , si avrà  $E_m(z) < \epsilon$ . Dunque

**Proposizione 2.1.1.** La convergenza di  $P(z)$  è uniforme in tutti i punti del disco  $z \leq r < R$ , cioè in tutti i punti in un disco arbitrariamente vicino al disco di convergenza.

2.1.2. *Criteri per trovare il raggio di convergenza.* Già visti nei corsi di analisi. Ripasso.

(1) Criterio del rapporto

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad (\text{se il limite esiste})$$

(2) Criterio della radice

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \quad (\text{se il limite esiste})$$

(3) Criterio di Cauchy-Hadamard

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

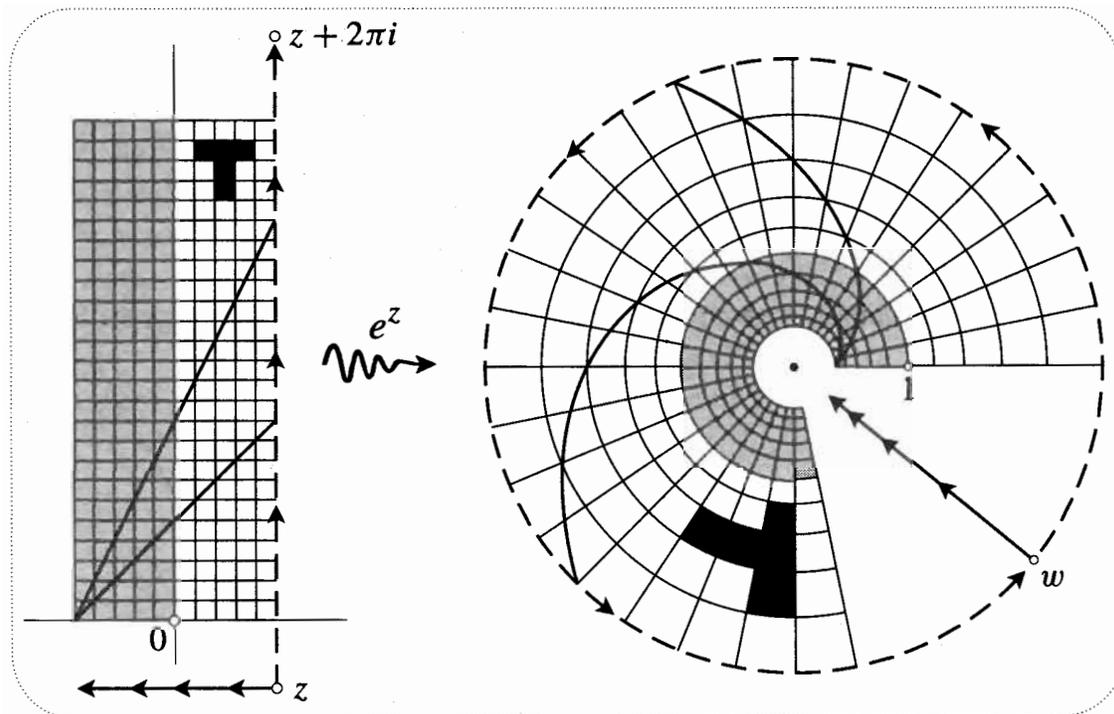
2.1.3. *Unicità.*

**Proposizione 2.1.2.** *Se due serie di potenze, centrate in zero, concordano su un segmento di curva che passa per lo zero (non importa quanto piccolo), o concordano su una successione di punti che converge a zero, sono identiche.*

2.1.4. *La funzione esponenziale, seni e coseni.*

$$z = x + iy \mapsto e^z \equiv 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y \equiv w = u + iv$$

$R = \infty$  (dimostrare!)



- (1) Se  $z$  viaggia verso l'alto con velocità costante  $s$ , allora  $w$  ruota attorno all'origine con velocità costante  $s$ . Dopo che  $z$  ha percorso una distanza di  $2\pi$ ,  $w$  ritorna alla sua posizione iniziale.
- (2) Se  $z$  viaggia verso sinistra con velocità costante  $s$ ,  $w$  viaggia verso l'origine con velocità che diminuisce costantemente. Viceversa, se  $z$  viaggia verso destra con velocità costante  $s$ ,  $w$  si allontana dall'origine con una velocità in costante aumento.
- (3) Combinando (1) e (2), si vede che l'intero piano- $w$  (con l'eccezione di  $w = 0$ ) è riempito dall'immagine di una striscia orizzontale, nel piano- $z$ , di altezza  $2\pi$ .
- (4) Linee rette sono trasformate in spirali.

Seni e coseni.

$$\cos z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}$$

equivalentemente

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad \text{e} \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$