

2.2. Il gruppo delle trasformazioni di Möbius. Le trasformazioni di Möbius hanno proprietà interessanti che studieremo. Un video molto piacevole sulle trasformazioni di Moebius si trova a

<http://www.youtube.com/watch?v=JX3VmDgiFnY&NR=1>

2.2.1. *Rette e cerchi in rette e cerchi.* Incominciamo col risolvere l'esercizio 1(4). Si vuole dimostrare che una trasformazione di Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

trasforma linee e cerchi in linee e cerchi. Il calcolo diretto è un calcolo laborioso. Per semplificarci la vita facciamo il calcolo per un caso particolare e poi argomentiamo che fare questo è sufficiente.

Se $c = 0$ allora

$$z \mapsto (a/d)z + (b/d)$$

è la moltiplicazione per un numero complesso ($z \mapsto w = (a/d)z$). Sulla base di quanto visto nella prima lezione, potremmo chiamarla una *stiro-rotazione*. La stiro-rotazione è seguita da una traslazione ($w \mapsto w + (b/d)$). È quindi geometricamente chiaro che linee e cerchi vanno in linee e cerchi.

Se $c \neq 0$, scriviamo

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c} \frac{1}{cz + d}.$$

Questa trasformazione è la composizione di 5 trasformazioni:

$$z \xrightarrow{(1)} w_1 = cz \xrightarrow{(2)} w_2 = w_1 + d \xrightarrow{(3)} w_3 = \frac{1}{w_2} \xrightarrow{(4)} w_4 = -\frac{ad - bc}{c} w_3 \xrightarrow{(5)} w_5 = w_4 + \frac{a}{c}$$

- (1) stiro-rotazione
- (2) traslazione
- (3) inversione complessa
- (4) stiro-rotazione
- (5) traslazione

Le stiro-rotazioni e le traslazioni trasformano linee e cerchi in linee e cerchi, se mostriamo che lo stesso vale per l'inversione complessa siamo a posto.

L'equazione di un cerchio è

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2\beta x - 2\gamma y + \delta = 0$$

e per $\alpha = 0$ si ha l'equazione di una linea retta. In notazione complessa l'equazione diventa

$$\alpha |z|^2 + \beta(z + \bar{z}) + i\gamma(z - \bar{z}) + \delta = 0$$

Poniamo $w = 1/z$ e sostituiamo

$$\alpha \frac{1}{|w|^2} + \beta \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} \right) + i\gamma \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} \right) + \delta = 0$$

Moltiplichiamo per $|w|^2 = \bar{w}w$ e otteniamo

$$\alpha + \beta(w + \bar{w}) - i\gamma(w - \bar{w}) + \delta|w|^2 = 0$$

che è ancora l'equazione di un cerchio (dove si è spostato il centro? come è variato il raggio?).

Facciamo il punto sulle trasformazioni di Möbius

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

- (1) stiro-rotazione = moltiplicazione per il numero complesso a , $S_a(z) = az$
- (2) traslazione = somma del numero complesso b , $T_b(z) = z + b$
- (3) inversione complessa $\mathcal{I}^C(z) = 1/z$

Allora

$$M = T_{\frac{a}{c}} \circ S_{-\frac{ad-bc}{c}} \circ \mathcal{I}^C \circ T_d \circ S_c$$

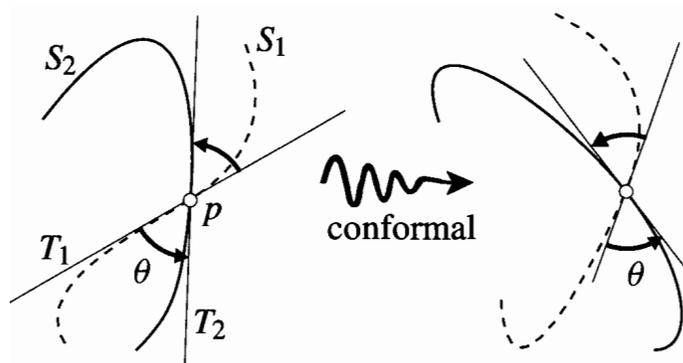
dove, come di consueto, “o” denota la composizione di funzioni.

Nota. La trasformazione

$$\mathcal{I}^G : z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$

è usualmente detta *inversione geometrica* o *inversione per raggi vettori reciproci nel piano* o semplicemente *inversione*. Come si vede facilmente, anch'essa trasforma linee e cerchi in linee e cerchi.

2.2.2. *Trasformazioni conformi*. Se una trasformazione preserva l'angolo — valore numerico e segno — tra qualunque coppia di curve che passano per il punto p , si dice che la trasformazione è *conforme* nel punto p .



Se la trasformazione è conforme in tutti i punti della regione in cui è definita, si dice che la trasformazione è *conforme*. Se il valore numerico dell'angolo è preservato, ma il segno è invertito, la trasformazione è detta *anti-conforme*. Ad esempio, $z \mapsto \bar{z}$ è anticonforme. Stiro-rotazioni e traslazioni sono conformi.

Si hanno le seguenti proposizioni.

Proposizione 2.2.1. *L'inversione geometrica $z \mapsto 1/\bar{z}$ è anti-conforme.*

Dimostrazione lasciata per esercizio (Esercizi 2.2)

□

Proposizione 2.2.2. *L'inversione complessa $z \mapsto 1/z$ è conforme.*

Perché composizione di due trasformazioni anti-conformi, $z \mapsto \bar{z}$ e $z \mapsto 1/\bar{z}$.

□

Proposizione 2.2.3. *Le trasformazioni di Möbius sono conformi.*

Per quanto visto sopra.

□

2.2.3. *Proprietà di gruppo.* La trasformazione

$$z \mapsto w = M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

è iniettiva e surgettiva: dato w , esiste (uno e uno solo) z che è trasformato in w . Questo si mostra esplicitamente calcolando la trasformazione inversa (esercizio 2.2(2)):

$$M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

M è detta normalizzata se $ad - bc = 1$. Si osservi che se M è normalizzata, anche M^{-1} lo è.

Si consideri $M = M_2 \circ M_1$, dove

$$M_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}, \quad \text{e} \quad M_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$$

Si verifica facilmente che anche M è una trasformazione di Möbius (esercizio 2.2(2)), cioè della forma

$$M(z) = \frac{Az + B}{Cz + D}$$

(non è algebricamente ovvio che se M_1 e M_2 sono non-singolari anche M è non singolare, cioè $AD - BC \neq 0$. Tra poco vedremo un approccio algebrico che rende questo ovvio.)

Morale:

Proposizione 2.2.4. *L'insieme delle trasformazioni di Möbius non singolari formano un gruppo rispetto alla composizione.*

Perché:

- (1) La trasformazione identica $\mathcal{E}(z) = z$ appartiene all'insieme.
- (2) La composizione di due elementi dell'insieme fornisce un elemento dell'insieme.
- (3) Ogni membro dell'insieme ha un inverso che è anch'esso nell'insieme.

□

Si osservi che i coefficienti a, b, c e d di una trasformazione di Möbius non sono unici. Se k è una costante non nulla, ka, kb, kc e kd definiscono la stessa trasformazione.

2.2.4. *Il gruppo delle trasformazioni di Möbius come gruppo di matrici.*

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \longleftrightarrow [M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Si osservi che da destra a sinistra c'è unicità, ma non viceversa: $k[M]$ e $[M]$ corrispondono alla stessa trasformazione M . Se M è normalizzata, $ad - bc = 1$, allora $[M]$ è unica a meno di un segno: $[M]$ e $-[M]$ danno la stessa trasformazione di Möbius. Questo ha un profondo significato fisico su cui torneremo più avanti nel corso.

Corrispondenze:

- (1) $[\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- (2) $[M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ha un inverso sse $\det([M]) = ad - bc$ è non nullo.
- (3) $[M^{-1}] = [M]^{-1}$
- (4) $[M_2 \circ M_1] = [M_2][M_1]$!!! (immediato verificare che se $[M_2]$ e $[M_1]$ sono non singolari (determinante non nullo) anche $[M_2 \circ M_1]$ è non singolare (perché $\det(AB) = \det(A)\det(B)$).

Questo gruppo di matrici di solito chiamato $GL(2, \mathbb{C})$.

Le trasformazioni di Möbius normalizzate formano un sottogruppo — perchè? Il gruppo di matrici corrispondente è un sottogruppo di $GL(2, \mathbb{C})$, di solito chiamato $SL(2, \mathbb{C})$.