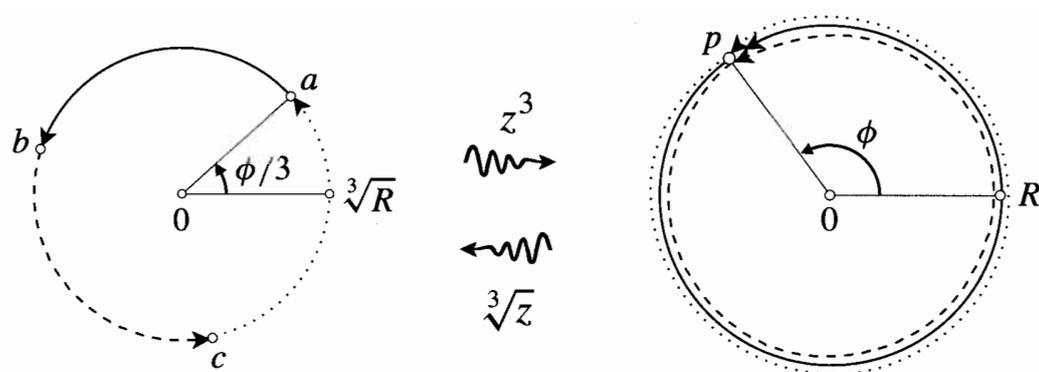


3.1. Multifunzioni.

3.1.1. **Esempio: potenze frazionarie.** Riprendiamo la figura della prima lezione che avevamo utilizzato per ripassare quali sono le soluzioni di $z^n = 1$,



Come mostra la figura, $\sqrt[3]{z}$ ha 3 valori ($z \neq 0$). È una *multifunzione*, o *funzione a più valori*. In particolare, questo significa che $f(z) = \sqrt[3]{z}$ è una funzione i cui valori sono insiemi con 3 elementi; nel punto p in figura

$$\sqrt[3]{p} = \{a, b, c\},$$

La figura suggerisce come trovare i tre valori di $\sqrt[3]{p}$ usando la trasformazione $z \mapsto z^3$: avendo trovato una radice cubica a possiamo trovare le altre due (b e c) usando il fatto che se $z = re^{i\theta}$ orbita con velocità angolare costante, allora $z^3 = r^3 e^{i3\theta}$ viaggia tre volte più veloce. Invertendo la trasformazione si divide per 3 la velocità, e questo è essenziale per comprendere la funzione $z \mapsto \sqrt[3]{z}$,

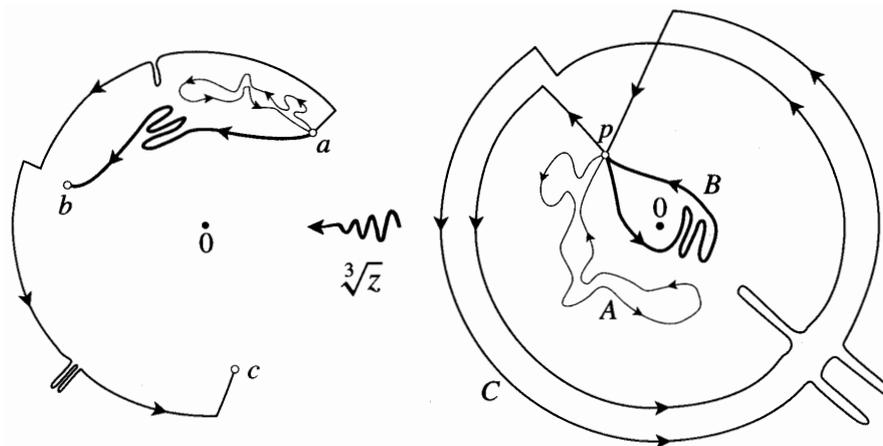
$$z = re^{i\theta} \mapsto \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\theta}{3}}$$

$\sqrt[3]{r}$ è la radice cubica reale unicamente definita, la sola sorgente di ambiguità nella formula è che ci sono infinite scelte per l'angolo θ di un dato punto z ,

$$\theta + 2n\pi, \quad n \text{ intero.}$$

Pensiamo a z come ad un punto che si muove nel piano e che è inizialmente nel punto p con angolo ϕ come mostrato in figura. Scegliamo, **arbitrariamente**, il punto a come radice cubica di p , cioè scegliamo $n = 0$ (avessimo scelto $n = 1$, cioè $\phi + 2\pi$, l'angolo della radice cubica sarebbe stato $\phi/3 + 2\pi/3$, cioè la radice cubica b , $n = 2$ avrebbe dato $\phi/3 + 4\pi/3$, cioè il punto c). Mentre z si muove, allontanandosi dal punto iniziale p , e cambiando l'angolo $\theta = \arg z$, il punto $\sqrt[3]{z}$ si allontanerà dalla sua posizione iniziale a .

Consideriamo quello che succede quando z si muove lungo una curva chiusa:



- Mentre z viaggia lungo la curva chiusa A (ritornando alla fine in p), il punto $\sqrt[3]{z}$ si muove lungo la curva mostrata in figura e ritorna al suo valore originale a .
- Se z viaggia lungo la curva chiusa B , che gira una volta intorno all'origine, il punto $\sqrt[3]{z}$ non ritorna in a , ma finisce in b (il dettaglio della forma della curva è irrilevante).
- Se z viaggia lungo la curva chiusa C , che gira due volte intorno all'origine, il punto $\sqrt[3]{z}$ finisce in c .
- Se z girasse tre volte intorno all'origine, ritornerebbe in a .

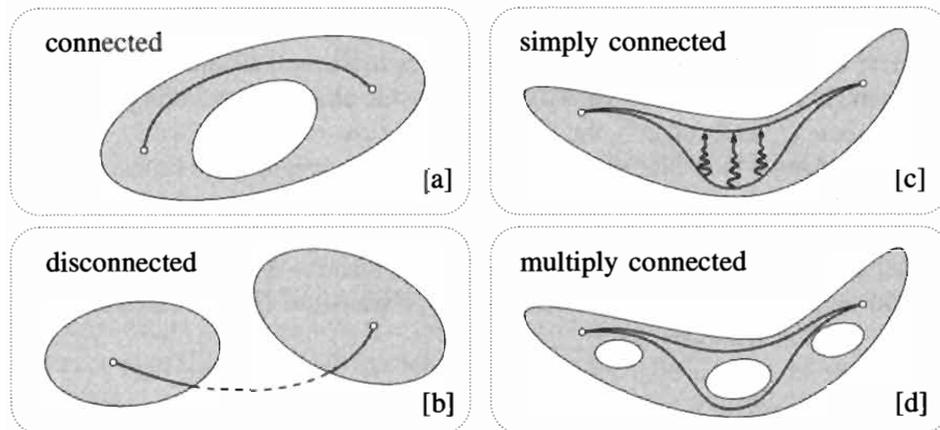
La scelta di $a = \sqrt[3]{p}$ è arbitraria. Se avessimo scelto $b = \sqrt[3]{p}$, le figure sarebbero ruotate di $2\pi/3$ e se avessimo scelto $c = \sqrt[3]{p}$, le figure sarebbero ruotate di $4\pi/3$. Il punto $z = 0$ è detto punto di diramazione di $z \mapsto \sqrt[3]{z}$.

3.1.2. Punti di diramazione di una multifunzione.

Definizione 3.1.1. Sia f una multifunzione complessa. Si dice che $q \in \mathbb{C}$ è un punto di diramazione di f se vale quanto segue: per qualunque punto $p \neq q$ nel dominio di f , si scelga arbitrariamente $a \in f(p)$ e si consideri il movimento di $f(z)$ quando z si muove lungo una curva chiusa arbitraria che inizia e finisce in p ; quando z ritorna in p , $f(z)$ non ritorna in a .

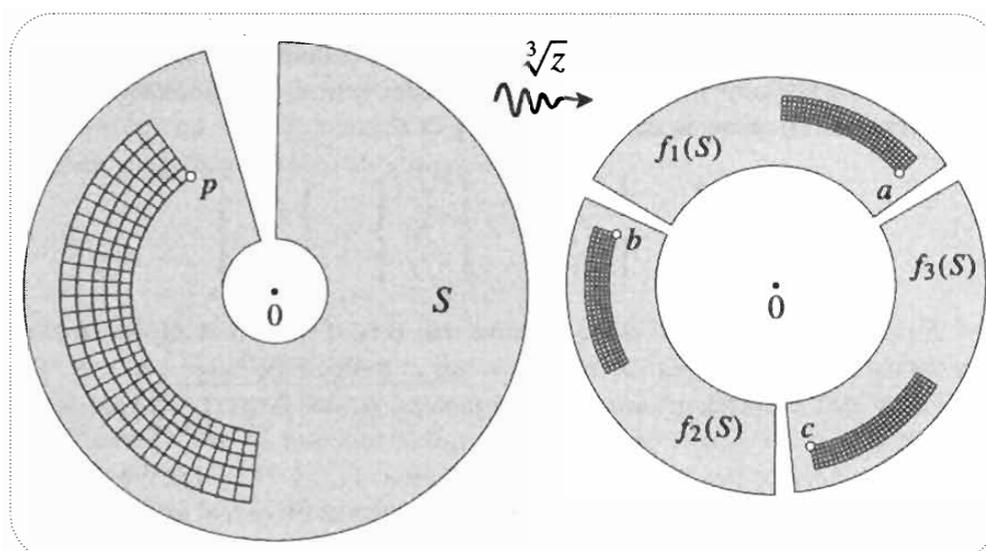
- (1) Se $f(z)$ ritorna per la prima volta al suo valore iniziale dopo N rivoluzioni attorno a q , si dice che q è un punto di diramazione algebrico di ordine $N - 1$ (es. per $f(z) = \sqrt[3]{z}$, $z = 0$ è un p.d.d.a. di ordine 2)
- (2) Punti di diramazione algebrici di ordine 1 sono detti punti di diramazione semplici. (es. per $f(z) = \sqrt{z}$, $z = 0$ è un p.d.d.a. semplice)
- (3) Se $f(z)$ non ritorna mai al suo valore iniziale, si dice che q è un punto di diramazione logaritmico.

3.1.3. **Rami di una multifunzione.** Si assumono note le nozioni di insieme connesso, disconnesso, semplicemente connesso e molteplicemente connesso, riassunte dalla figura (se non lo sono, spiegarle a lezione)



- Come ottenere 3 funzioni ordinarie ad un sol valore dalla multifunzione a 3 valori $f(z) = \sqrt[3]{z}$?

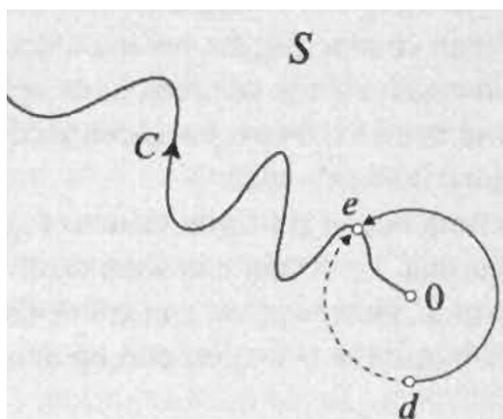
Si scelga un punto $z = p \neq 0$ e si scelga arbitrariamente uno dei 3 valori di $\sqrt[3]{p}$, diciamo a ; quindi si permetta a z di muoversi. In questo modo otteniamo un unico valore $\sqrt[3]{z}$ associato con ogni cammino che parte da p e finisce in Z , **a patto che** il cammino non giri intorno al punto di diramazione $z = 0$ (il dettaglio della forma del cammino è irrilevante). Questo mostra che possiamo ottenere una funzione f_1 ad un sol valore restringendo z ad un insieme *connesso* S che contiene p , ma non contiene il punto di diramazione. Se inizialmente avessimo scelto uno degli altri due valori di $\sqrt[3]{p}$, b e c , mediante una costruzione analoga, avremmo ottenuto due altre differenti funzioni ad un sol valore, f_2 e f_3 .



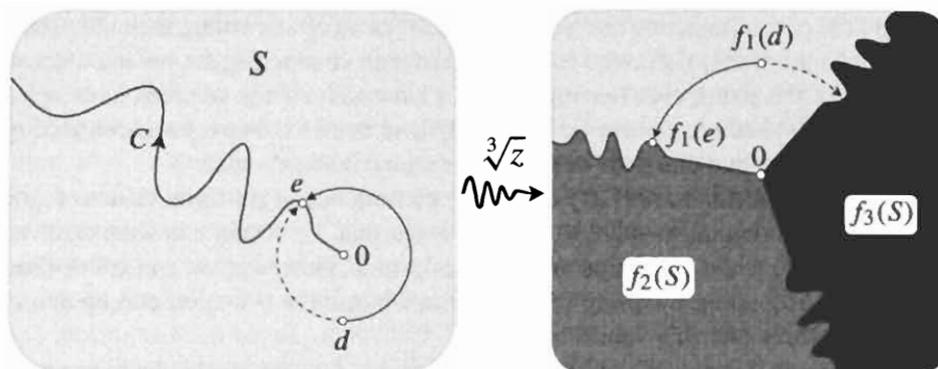
(sempre quadratini in quadratini! un segno che f è conforme).

- Le funzioni ad un sol valore f_1, f_2 e f_3 sono chiamate *rami* della multifunzione $f(z) = \sqrt[3]{z}$.
- Come estendere il dominio S dei rami in modo da ottenere le radici cubiche di qualunque punto del piano?

Per prima cosa, si prenda una qualunque curva C dal punto di diramazione all'infinito. Questa curva si chiama *taglio (del ramo)* o anche *curva di diramazione*.



In prima battuta, estendiamo S al piano senza la curva C . Questo evita che ci siano in S cammini chiusi intorno al punto di diramazione. In questo modo otteniamo 3 rami f_1, f_2 e f_3 . Adesso estendiamo S a tutto il piano. Consideriamo un punto e sul taglio. Immaginiamo che z viaggi lungo un cerchio centrato nell'origine che passa per e . La figura sotto mostra che $f_1(z)$ si avvicina a due valori differenti a seconda che z si muova in senso orario o in senso anti-orario:



Se, **arbitrariamente**, conveniamo che $f_1(e)$ è il valore ottenuto per un avvicinamento antiorario, allora f_1 risulta definita univocamente su C e quindi in tutto il piano \mathbb{C} . Similmente, possiamo estendere a tutto \mathbb{C} i domini di f_2 e f_3 . Osserviamo che f_1, f_2 e f_3 sono *discontinue sul taglio* C .

- La scelta del taglio è arbitraria — il solo requisito è che sia una curva semplice che parte dal punto di diramazione e va all'infinito. Come dice Needham, la

multifunzione $f(z) = \sqrt[3]{z}$ è inconsapevole del nostro desiderio di tagliarla in tre rami. Se z si muove lungo un cammino, f varia in modo continuo: se z attraversa il taglio, il valore di f salta da un ramo ad un altro. Se si incomincia con $f_1(z)$, e z si muove in senso anti-orario, quando si attraversa il taglio, $f_1(z)$ salta in $f_2(z)$ e continuando così, dopo un giro completo, $f_2(z)$ salterà in $f_3(z)$.

• Di solito, come taglio si sceglie l'asse reale negativo, il che risulta nella restrizione $-\pi < \theta \leq \pi$, $\theta = \arg(z)$. Questa scelta definisce il *ramo principale di f* , a volte denotato $[f]$. Si osservi che $[\sqrt[3]{z}]$ concorda con la radice cubica reale sull'asse positivo, ma non su quello negativo ($[\sqrt[3]{-1}] = e^{i\pi/3}$). Si osservi che gli altri due rami possono essere espressi in termini del ramo principale come $e^{i2\pi/3}[\sqrt[3]{z}]$ e $e^{i4\pi/3}[\sqrt[3]{z}]$.

3.1.4. Rilevanza per le serie di potenze. Già Newton conosceva la serie binomiale per n numero reale arbitrario

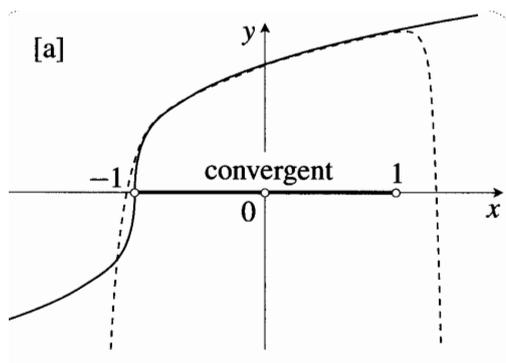
$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \dots$$

(e la utilizzò come uno strumento chiave per lo sviluppo del calcolo, così come anche Eulero fece in seguito). L'intervallo di convergenza della serie è $-1 < x < 1$ (esercizio 3(1)).

Come spiegare questo intervallo di convergenza per esempio per $n = 1/3$? La funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x}$$

non ha singolarità e la regola della distanza dalla singolarità più vicina non funziona. La figura sotto mostra il grafico della funzione e del polinomio approssimante di 30-esimo grado



A differenza della funzione $1/(1+x^2)$, il mistero non scompare quando si passa alla funzione complessa $f(z) = (1+z)^{1/3}$ perchè $f(z)$ non ha singolarità.

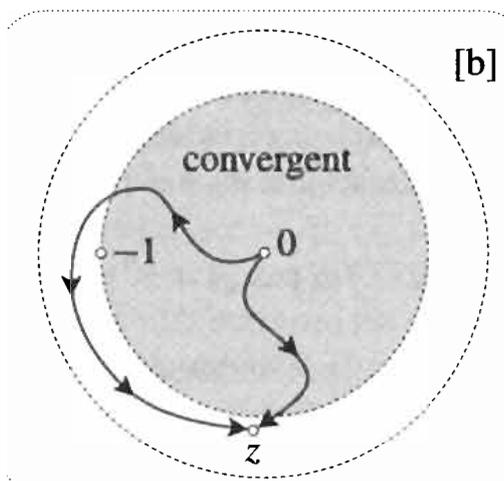
Consideriamo

$$f(z) = (1+z)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}z - \frac{1}{9}z^2 + \frac{5}{81}z^3 + \dots$$

La serie è una funzione (ha un solo valore), ma $f(z)$ è una multifunzione con punto di diramazione di secondo grado in $z = -1$. Ad esempio,

$$f(0) = (1, e^{i2\pi/3}, e^{-i2\pi/3})$$

Supponiamo che la serie sia convergente nel punto z mostrato in figura

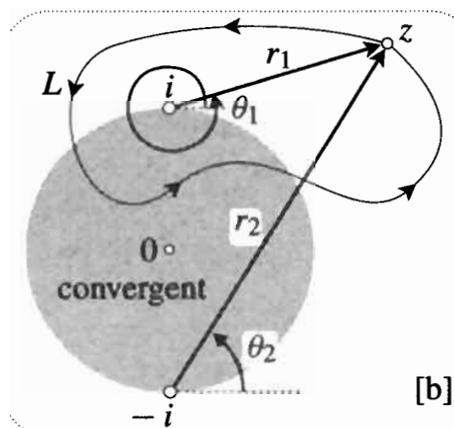


Partendo da $z = 0$ con valore $f(0) = 1$ e viaggiando lungo i due cammini mostrati in figura si finisce in due valori differenti di $f(z)$ (perchè si ha un cammino chiuso intorno al punto di diramazione). Ma una serie non può riprodurre questo fenomeno! La supposizione è sbagliata. Quindi il criterio introdotto nella prima lezione va così modificato:

• **Criterio per determinare il raggio di convergenza R dello sviluppo in serie della funzione $f(z)$ nel punto z_0 :** R è la distanza tra z_0 e la singolarità o il punto di diramazione più vicino.

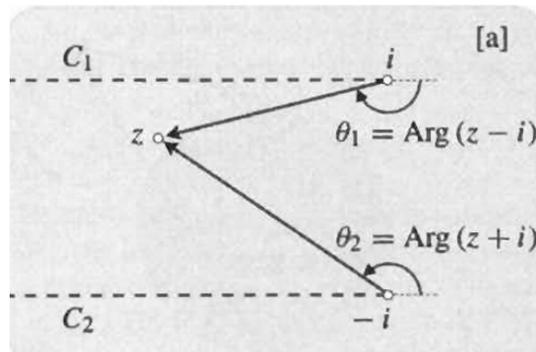
3.1.5. *Un esempio con due punti di diramazione.*

$$f(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{(z + i)(z - i)}$$



$$\sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}$$

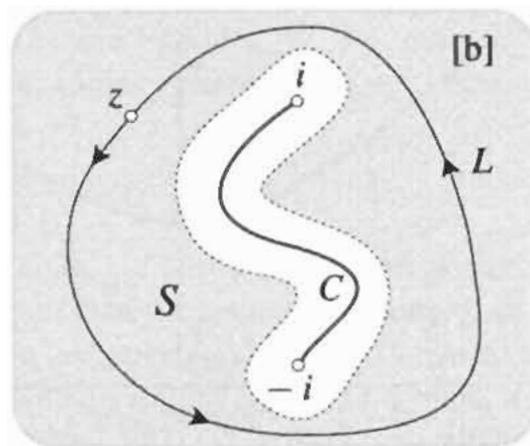
- Due tagli. Scelta standard:



Con θ_1 e θ_2 ristretti al loro valore principale:

$$-\pi < \theta_1 \leq \pi \quad -\pi < \theta_2 \leq \pi$$

- Altra possibilità: un solo taglio



Spiegare perchè anche questa scelta funziona (esercizio).

3.1.6. **La funzione logaritmo.** Il logaritmo può essere introdotto come l'inverso di e^z ,

$$e^{\log(z)} = z$$

Quindi (esercizio)

$$\log(z) = \ln |z| + i \arg(z)$$

Dunque il logaritmo è una multifunzione che assume infiniti valori, p.es.,

$$\log(2 + 2i) = \ln 2\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2n\pi i, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Questo è abbastanza ovvio se si riconsidera la figura della trasformazione $z \mapsto e^z$ (lezione 2.1.3).

$z = 0$ è un punto di diramazione. A differenza di quelli algebrici, girandoci intorno non si ritorna mai al punto di partenza. È un punto di diramazione logaritmico (questo spiega la terminologia già introdotta). Il ramo principale della multifunzione logaritmo è di solito denotato con Log ,

$$\text{Log}(z) = \ln |z| + i \arg(z), \quad -\pi < \arg(z) \leq \pi$$

3.1.7. Singolarità e punti di diramazione all'infinito. Per studiare una funzione nell'intorno dell'infinito, si considera il cambiamento di variabile

$$\zeta = \frac{1}{z}$$

e si studia la funzione $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ nell'intorno di $\zeta = 0$. Ad esempio, $f(z) = z$ è singolare all'infinito, mentre $f(z) = \sqrt{z}$ ha un punto di diramazione semplice in 0, ma anche all'infinito (dove è anche singolare).