

4.2. Integrazione complessa.

4.2.1. **Campo vettoriale associato ad una funzione complessa.** Alla funzione complessa $H(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ si può associare il campo vettoriale nel piano $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + v(\mathbf{r})\mathbf{e}_y$, $\mathbf{r} = (x, y)$, oppure il campo vettoriale “coniugato”¹

$$\overline{\mathbf{H}} = u(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + v(\mathbf{r})\mathbf{e}_y.$$

Viceversa, a un dato un campo vettoriale $\mathbf{H} = H_x\mathbf{e}_x + H_y\mathbf{e}_y$ si può associare la funzione complessa $H(z) = H(x + iy) = H_x(x, y) + iH_y(x, y)$ oppure la funzione complessa $\overline{H} = H_x - iH_y$. A questo stadio iniziale potrà sembrare strano, ma l’associazione **naturale** è quella “coniugata”.

N.B. Con abuso di notazione, potremmo parlare di campo $\overline{f(z)}$ associato alla funzione $f(z)$. In questo caso la cautela è d’obbligo: quando diciamo “campo $\overline{f(z)}$ ” indentiamo che si consideri $\overline{f(z)}$ **non** come una funzione complessa, ma come una funzione vettoriale del vettore $\mathbf{r} = (x, y)$, che ha $u = u(x, y)$ come componente- x e $-v = -v(x, y)$ come componente- y .

4.2.2. **Integrazione.** Sull’integrazione complessa c’è poco da dire, senza saperlo, la conoscete già: dato un cammino regolare K nel piano complesso dal punto z_1 al punto z_2 , l’integrale di linea

$$\int_K H(z)dz$$

significa

$$\int_K H(z)dz = \int_K (u + iv)(dx + idy) = \int_K udx - vdy + i \int_K udy + vdx$$

Quindi la nozione di integrale di una funzione complessa è ricondotta a quella di integrale di linea nel piano, che si assume noto dall’analisi reale. Le nozioni di continuità della curva e di regolarità (esistenza della tangente) sono le stesse sia che si riguardi il piano come \mathbb{C} sia come \mathbb{R}^2 .

Si vede facilmente che la parte reale e la parte immaginaria dell’integrale hanno una naturale interpretazione geometrica in termini del campo vettoriale coniugato, si ha infatti

$$\begin{aligned} \int_K udx - vdy &= \int_K udx + (-v)dy = \int_K \overline{\mathbf{H}} \bullet \mathbf{T} ds \\ \int_K udy + vdx &= \int_K udy - (-v)dx = \int_K \overline{\mathbf{H}} \bullet \mathbf{N} ds \end{aligned}$$

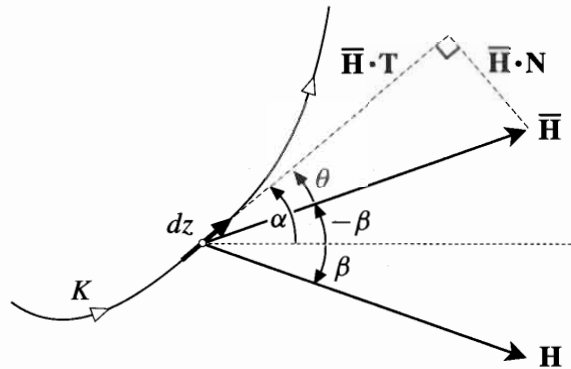
¹È invalso l’uso di chiamare campo di Polya il campo \overline{f} associato alla funzione complessa f , perchè questa associazione è discussa e utilizzata nel libro di analisi complessa di Polya. Polya è stato un grande matematico, ma questa (tutto sommato) piccola cosa è un trucco noto ai fisici da molto tempo. Per questo si è preferito il termine neutro “coniugato”.

dove $ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ è la lunghezza infinitesima di un arco di curva, e \mathbf{N} sono rispettivamente il versore tangente e il versore normale alla curva, cioè $\mathbf{T} ds = d\mathbf{r} = (dx, dy)$ e $\mathbf{N} ds = (dy, -dx)$.

In coordinate polari il significato geometrico di Hdz è ancora più trasparente. Siano β e α gli angoli di H e dz rispettivamente, allora

$$Hdz = He^{i\beta} e^{i\alpha} ds.$$

Detto θ è l'angolo tra $\overline{\mathbf{H}}$ e dz , si vede facilmente dalla figura



che

$$He^{i\beta} e^{i\alpha} ds = |\overline{\mathbf{H}}| e^{i\theta} ds,$$

e quindi che

$$\begin{aligned} Hdz &= [|\overline{\mathbf{H}}| \cos \theta + i |\overline{\mathbf{H}}| \sin \theta] ds \\ &= [\overline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{T} + i \overline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{N}] ds \\ &= \overline{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{r} + i \overline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{N} ds \end{aligned}$$

4.2.3. Circuitazione e Flusso. Consideriamo adesso il caso in cui il cammino d'integrazione sia un circuito, descritto da una curva regolare (la tangente esiste) semplice (non ci sono intersezioni) chiusa C . In particolare, questo significa che la regione di piano \mathcal{R} racchiusa da C è *semplicemente* connessa. Allora

$$\oint_C H(z) dz = \oint_C \overline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{T} ds + i \oint_C \overline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{N} ds$$

I due integrali a secondo membro li conoscete: il primo è la circuitazione di $\overline{\mathbf{H}}$ lungo la curva chiusa C ,

$$\mathcal{C}(\overline{\mathbf{H}}, C) = \oint_C \overline{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{R}} \nabla \times \overline{\mathbf{H}} dS,$$

(per la seconda uguaglianza è stato usato il teorema di Green-Stokes), mentre il secondo è il flusso di $\overline{\mathbf{H}}$ attraverso la curva chiusa C (siamo in due dimensioni e il

bordo di una regione è una curva chiusa)

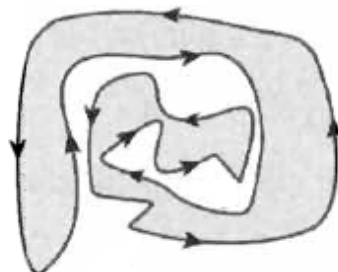
$$\mathcal{F}(\overline{H}, C) = \oint_C \overline{H} \cdot \mathbf{N} ds = \iint_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \overline{H} dS,$$

per la seconda uguaglianza è stato usato il teorema di Gauss in due dimensioni). In definitiva,

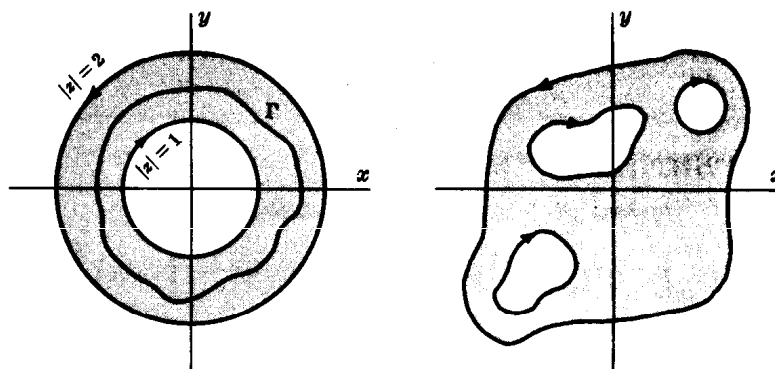
$$\oint_C H(z) dz = \mathcal{C}(\overline{H}, C) + i\mathcal{F}(\overline{H}, C)$$

Siete così in grado di calcolare integrali di funzione complesse lungo curve chiuse con metodi che già conoscete: basta che calcolate circuitazione e flusso del campo coniugato.

Ripasso su curve e convenzioni. Esempio di una regione \mathcal{R} del piano semplicemente connessa:



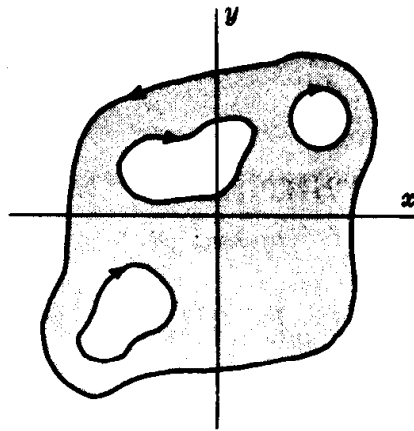
Il bordo è una curva semplice. Esempi di regioni del piano molteplicemente connesse:



Il bordo sono due o più curve semplici: $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots$

Ricordiamo la **convenzione sul percorso di un cammino chiuso**: si dice che il bordo C di una regione \mathcal{R} è percorso in *sensu o verso positivo* se camminando lungo quella direzione, la regione risulta sempre a sinistra. Per un cerchio la direzione positiva risulta essere quella anti-oraria. La normale \mathbf{N} è la *normale*

diretta verso l'esterno, e quindi a destra di chi cammina lungo C .

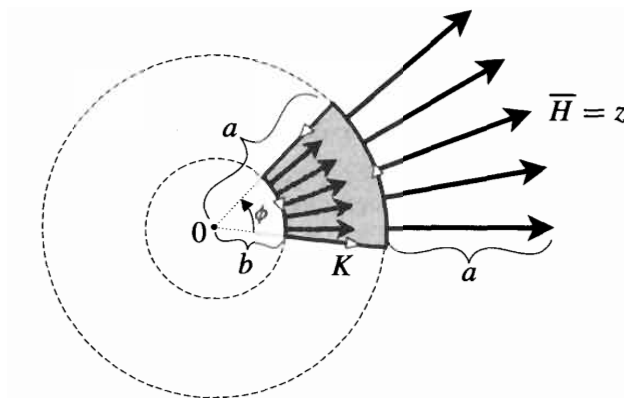


Occorre fare attenzione a questo in particolare per situazioni come nella figura sopra.

Esempio. Calcoliamo

$$\oint_C \bar{z} dz$$

per C curva chiusa attorno all'origine, ad esempio un cerchio. Il campo coniugato associato a $H(z) = \bar{z}$ è $\bar{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$.



La circuitazione è chiaramente zero, ma il flusso è positivo (entrano più linee di forza, di quante ne escano). In effetti, si ha

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{r} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{r} &= 2 \end{aligned}$$

Quindi

$$\oint_C \bar{z} dz = 2i\mathcal{A}$$

dove \mathcal{A} è l'area della regione di piano racchiusa da C .

4.2.4. *Funzioni analitiche = campi solenoidali e irrotazionali nel piano.*

Proposizione 4.2.1. *Il campo vettoriale coniugato della funzione complessa H è solenoidale (divergenza = zero) e irrotazionale (rotore = zero) sse H è analitica.*

Questa proposizione è molto importante e la sua verifica è un semplice calcolo:

$$\begin{aligned}\nabla \times \overline{\mathbf{H}} &= \partial_x(-v) - \partial_y u = -(\partial_x v + \partial_y u) \\ \nabla \bullet \overline{\mathbf{H}} &= \partial_x u + \partial_y(-v) = \partial_x u - \partial_y v\end{aligned}$$

Quindi, divergenza e rotore si annullano se e solo se sono soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann.

4.2.5. *Significato fisico delle funzione analitiche.*

• **Elettrostatica.** Si può pensare al campo coniugato come ad un campo elettrico $\overline{\mathbf{E}}$ nel piano in condizioni statiche. In questo caso le equazioni sono

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= 0 \quad \text{ovunque} \\ \nabla \bullet \mathbf{E} &= 0 \quad \text{dove non ci sono cariche}\end{aligned}$$

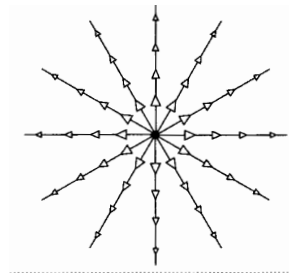
Al campo elettrico $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ è quindi associata la funzione analitica $f(z) = E_x - iE_y$. La legge di Gauss dice

$$\mathcal{F}(\mathbf{E}, C) = \oint_C \mathbf{E} \bullet \mathbf{N} ds = 2\pi \sum_i q_i$$

La scelta di 2π a secondo membro è per avere

$$\frac{q}{r} \mathbf{e}_r$$

come campo prodotto da una carica puntiforme q . Notare che nel piano il campo va come $1/r$ e non come $1/r^2$. Fisicamente possiamo pensarlo come ottenuto da un filo indefinito normale al piano con densità lineare di carica uniforme. Le linee di forza del campo sono ben note:



Il campo \mathbf{E} nel piano è il campo elettrico in un piano normale al filo. La funzione complessa *coniugata* associata al campo di una carica puntiforme nell'origine è

$$\frac{q}{z} = q \frac{e^{-i\theta}}{r}$$

Vediamo un problemino che ci sarà utile tra poco. Se nel piano ci sono altre cariche, per il campo elettrico totale avremo

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r} \mathbf{e}_r + \mathbf{E}_{ext}$$

dove \mathbf{E}_{ext} è il campo generato dalle cariche esterne. Detta $g(z)$ la funzione associata a \mathbf{E}_{ext} , la funzione complessa associata a \mathbf{E} è

$$\frac{q}{z} + g(z) = \frac{q + zg(z)}{z}$$

Se prendiamo una curva C che racchiude solo l'origine, per la legge di Gauss abbiamo

$$\mathcal{F}(\mathbf{E}, C) = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} ds = 2\pi q$$

In generale

$$\oint_C H(z) dz = \mathcal{C}(\overline{H}, C) + i\mathcal{F}(\overline{H}, C)$$

ma nel nostro caso la circuitazione \mathcal{C} è zero. Quindi

$$\oint_C \frac{q + zg(z)}{z} dz = 2\pi i q$$

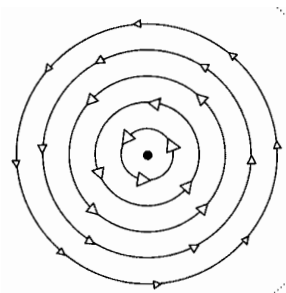
Tra poco ritorneremo a questa formula carina.

• **Magnetostatica.** Equazioni per il campo magnetico:

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad \text{dove non ci sono correnti}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{ovunque (non ci sono cariche magnetiche)}$$

Possiamo procedere come prima, ma adesso i ruoli di circuitazione e flusso si scambiano: abbiamo cariche di “circuitazione” cioè correnti I e le linee di flusso prive di pozzi e sorgenti:

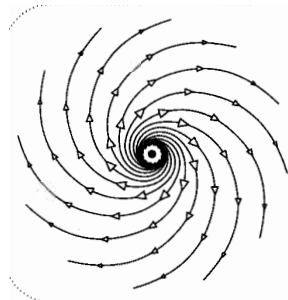


• **Fluido perfetto stazionario.** Equazioni per il campo di velocità del fluido:

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad \text{dove non ci sono vortici}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{dove non ci sono pozzi o sorgenti}$$

Per “cariche” (pozzi o sorgenti e vortici) puntiformi, oltre alle linee di flusso già viste per campi elettrici e magnetici, adesso sono anche possibili configurazioni di questo tipo



Il punto è sia una sorgente sia un vortice.

4.2.6. Teorema di Cauchy.

Proposizione 4.2.2. Sia $f(z)$ analitica in una regione \mathcal{R} e sul suo bordo C . Allora

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

La dimostrazione segue da quanto visto finora.

4.2.7. **Formula di Cauchy.** Riprendiamo la formula “carina” che avevamo ottenuto parlando di elettrostatica,

$$\oint_C \frac{q + zg(z)}{z} dz = 2\pi i q$$

$g(z)$ è analitica, per il resto è arbitraria. Quindi quello che abbiamo a numeratore della funzione integranda è una funzione analitica $f(z)$ nella regione racchiusa da C tale che $f(0) = q$, che è la quantità che compare a secondo membro moltiplicata per $2\pi i$. Quindi, facendo astrazione dal significato fisico, quello che abbiamo è

$$\oint_C \frac{f(z) dz}{z} = 2\pi i f(0)$$

Aver posto la carica nell’origine era del tutto arbitrario, l’avessimo posta in un generico punto p avremmo ottenuto

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - p} dz = 2\pi i f(p)$$

Questa formula è nota come *formula di Cauchy* e vale sotto l’ipotesi che $f(z)$ sia analitica all’interno e lungo una curva semplice chiusa C ; p è un punto qualsiasi all’interno di C .

Il fatto che nel caso considerato q fosse reale è irrilevante: la formula vale per q complesso. Vista la sua importanza, riotteniamola procedendo direttamente:

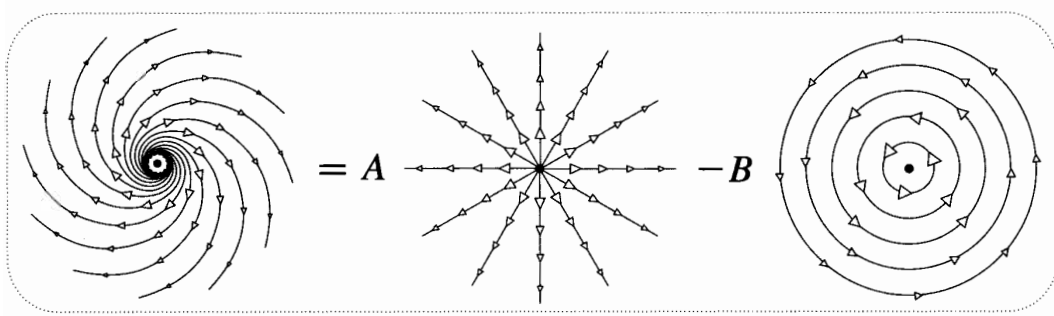
Consideriamo la funzione

$$H(z) = \frac{f(z)}{z-p}$$

dove $f(z)$ è analitica. Poiché $H(z)$ è analitica eccetto che in p , rotore e divergenza del campo coniugato associato \bar{H} saranno nulli ovunque eccetto che in p . Perciò se C è un un circuito attorno a p , tutto il flusso e circolazione emanano da un piccolo intorno di p . Se $f(p) = A+iB$, in questo piccolo intorno (piccolo a piacere) avremo

$$\bar{H} = \frac{A-iB}{\bar{z}-\bar{p}} = A \frac{1}{\bar{z}-\bar{p}} - B \frac{i}{\bar{z}-\bar{p}}$$

cioè $\bar{H} =$



Da cui

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-p} dz = \mathcal{L}(\bar{H}, C) + i\mathcal{F}(\bar{H}, C) = -2\pi B + i2\pi A = 2\pi i f(p)$$