

## 6.1. Conseguenze del teorema di Cauchy II.

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} ds = 2\pi \sum_i q_i$$

↓

**Teorema di Cauchy.** Sia  $f(z)$  analitica in una regione  $\mathcal{R}$  e sul suo bordo  $C$ . Allora

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

↓

**Formula di Cauchy.** Sia  $f(z)$  sia analitica all'interno e lungo una curva semplice chiusa  $C$  e sia  $a$  un punto qualsiasi all'interno di  $C$ . Allora

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Nella lezione 5.1 abbiamo visto alcune conseguenze del teorema e della formula di Cauchy. In questa lezione continuiamo l'esplorazione.

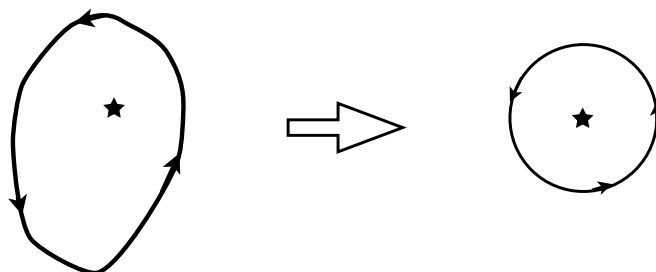
### 6.1.1. Teorema di Deformazione.

Questo teorema non è una conseguenza del teorema di Cauchy, ma un suo presupposto per una corretta applicazione dello stesso. Se si tiene presente il teorema di Gauss, il seguente fatto dovrebbe essere chiaro: *il valore dell'integrale di contorno*

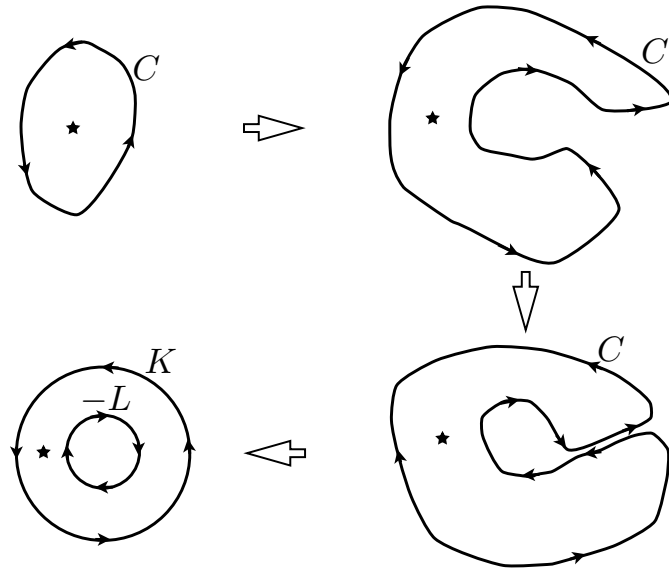
$$\oint_C f(z) dz$$

*non cambia se la curva chiusa  $C$  è deformata a piacere, purché la deformazione avvenga passando sempre per punti analitici della funzione  $f(z)$ .* Chiamiamo questo fatto *teorema di deformazione*. Illustriamolo con alcuni esempi

#### Esempio 1.



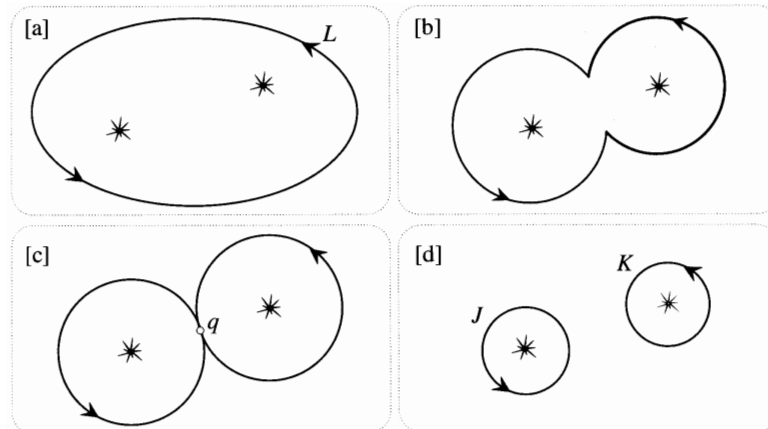
## Esempio 2.



$$\oint_C f(z)dz = \oint_{K-L} f(z)dz = \oint_K f(z)dz + \oint_{-L} f(z)dz = \oint_K f(z)dz - \oint_L f(z)dz$$

Si osservi la notazione algebrica per i cammini chiusi (segno positivo per verso di percorrenza antiorario).

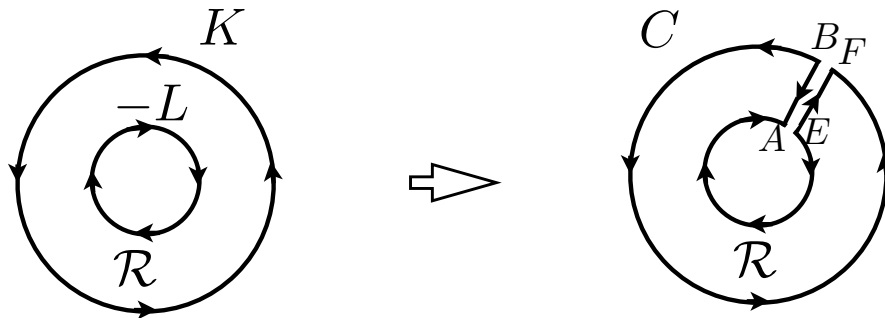
## Esempio 3.



$$\oint_L f(z)dz = \oint_J f(z)dz + \oint_K f(z)dz$$

6.1.2. **Teorema e formula di Cauchy per regioni molteplicemente connesse.** Si dimostrano con il teorema di deformazione: è data la regione  $\mathcal{R}$  con

bordo  $K-L$  (ricordiamo la notazione per i bordi:  $K-L = \partial\mathcal{R}$ ). Per deformazione questa è trasformata nella regione a destra della figura:

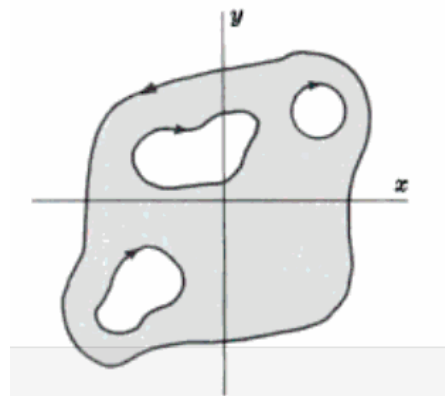


Nel limite in cui i segmenti  $AB$  e  $EF$  si toccano gli integrali lungo i segmenti si elidono a vicenda, essendo diretti in senso opposto. Quindi, se la funzione  $f(z)$  è analitica in  $\mathcal{R}$  si avrà

$$\oint_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz = \oint_{K-L} f(z)dz = \oint_C f(z)dz = 0$$

Risulta così dimostrato il teorema di Cauchy per una regione molteplicemente connessa e lo stesso varrà per la formula di Cauchy.

Formalità matematiche a parte, ricordarsi sempre che teorema e formula di Cauchy sono sostanzialmente il teorema di Gauss: la normale deve essere diretta verso l'esterno di modo che il bilancio complessivo del flusso attraverso il bordo di  $\mathcal{R}$  sia corretto. Il verso positivo corretto delle curve interne in figura è quello orario:



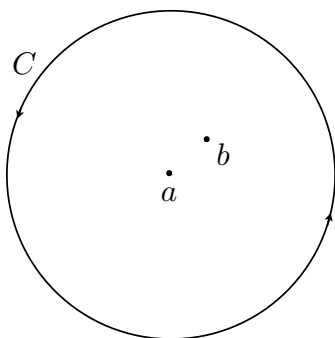
### 6.1.3. Teorema di Morera, Teorema di Liouville e Teorema fondamentale dell'algebra.

L'inverso del teorema di Cauchy, noto come *Teorema di Morera*, afferma che se  $f(z)$  è continua in una regione semplicemente connessa  $\mathcal{R}$  e se

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

lungo ogni curva semplice chiusa contenuta in  $\mathcal{R}$ , allora  $f(z)$  è analitica in  $\mathcal{R}$ . Se si ragiona in termini di cariche e teorema di Gauss nel piano, questo fatto è così ovvio da non richiedere una dimostrazione (almeno per un fisico).

Il Teorema di Liouville afferma che se  $f(z)$  è analitica e limitata ( $|f(z)| < M$ ) in tutto il piano complesso, allora deve essere necessariamente una costante. Non è difficile dimostrare questo teorema. Ecco una dimostrazione. Se  $a$  e  $b$  sono due punti qualunque del piano e  $C$  è un cerchio di raggio  $R \geq 2|a - b|$ ,



dalla formula di Cauchy e dalla disuguaglianza della lezione 5.1.1,

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq [\text{valore massimo di } |f(z)| \text{ lungo } C] \times [\text{lunghezza di } C],$$

si ha, essendo per ipotesi  $|f(z)| < M$ ,

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right] f(z) dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|a-b|M}{(1/2)R^2} R d\theta \\ &= 2 \frac{|a-b|M}{R} \end{aligned}$$

(chiaramente  $R - |a - b| \geq R - R/2 = R/2$ ). Facendo tendere  $R$  a  $\infty$  si ha  $|f(b) - f(a)| = 0$ , cioè  $f(z) = \text{costante}$ , che è quanto si voleva dimostrare.

Una funzione che è analitica ovunque nel piano complesso, e non è una costante, deve necessariamente avere una singolarità all'infinito. Una funzione di questo tipo è detta *intera*. Sono funzioni intere i polinomi, la funzione esponenziale, le funzioni trigonometriche e quelle iperboliche. Le intere sono un caso particolare delle meromorfe (a cui è consentito avere poli). Giusto per riassumere la terminologia sin qui introdotta: funzioni *olomorfe*, *analitiche*, *meromorfe*, *interi* e *armoniche* (tra poco) — c'è da farsi venire il mal di testa.

Il teorema di Liouville può essere riformulato in una maniera che lo rende molto più intrigante. È infatti equivalente alla seguente proposizione: *una trasformazione analitica non può comprimere l'intero piano complesso in una regione dentro a un cerchio di raggio finito senza schiacciarlo fino in fondo in un punto.*

Il *Teorema fondamentale dell'algebra* stabilisce che ogni equazione algebrica  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n = 0$ , di grado  $n$  e con  $a_n \neq 0$ , possiede almeno una radice. Si tratta di un'immediata conseguenza del Teorema di Liouville. Infatti, ragionando per assurdo, se  $P(z)$  non avesse radici, allora

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

sarebbe analitica in tutto il piano complesso. Chiaramente,  $f(z)$  è limitata su tutto il piano complesso (il suo modulo tende a zero per  $z$  che tende all'infinito). Allora, per il teorema di Liouville,  $f(z)$ , e quindi  $P(z)$ , dovrebbero essere costanti. Poiché si è raggiunta una contraddizione, il teorema fondamentale dell'algebra — cioè l'esistenza di almeno una radice o zero di  $P(z)$  — risulta dimostrato. Se ne ha almeno una, ne avrà  $n$  (magari alcune coincidenti): basta fattorizzare e continuare ad applicare il teorema.

#### 6.1.4. *Teorema della media di Gauss e teoremi del massimo e minimo modulo.*

Il *Teorema della media di Gauss* afferma che se  $f(z)$  è analitica all'interno e lungo un cerchio  $C$  di raggio  $R$  e con centro in  $z = a$ , allora  $f(a)$  è la media dei valori di  $f(z)$  su  $C$ . Questo fatto è un'immediata conseguenza della formula di Cauchy. Infatti, se  $C$  è un cerchio di raggio  $R$ , la sua equazione è  $|z - a| = R$ , cioè  $z = a + Re^{i\theta}$ , e

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz$$

diventa

$$(1) \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} (iRe^{i\theta} d\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) d\theta$$

che è quanto volevasi dimostrare.

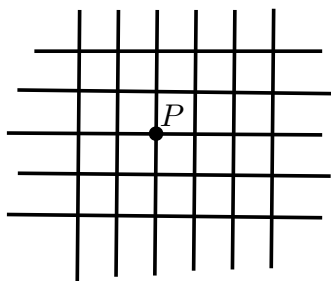
Il *Teorema del massimo modulo* afferma che se  $f(z)$  è analitica dentro e lungo una curva semplice chiusa  $C$ , allora il massimo del modulo di  $f(z)$  si trova su  $C$  (a meno che  $f$  non sia costante e quindi uguale dappertutto). Il *Teorema del minimo modulo* stabilisce che, sotto le stesse condizioni, con la condizione aggiuntiva che  $|f(z)| \neq 0$  dentro  $C$ , anche il valor minimo di  $|f(z)|$  è raggiunto sul bordo  $C$ . Questi due teoremi si dimostrano facilmente a partire da (1); lo faremo in classe o lo lasceremo come esercizio.

Nella risoluzione dell'esercizio 4.1(1) abbiamo visto che le parti reali e immaginarie di una funzione analitica  $f = u + iv$  sono armoniche, cioè sono soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{dove} \quad \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x^2 + \partial_y^2$$

In effetti, il teorema della media vale per funzioni armoniche, sia in due dimensioni sia in tre. Maxwell chiamava il laplaciano di  $\varphi$  nel punto  $P$  la *concentrazione di*

$\varphi$  in quel punto, nel senso che è una misura della differenza tra la media della funzione su una piccola superficie sferica centrata in  $P$  e il valore della funzione in quel punto. Il nocciolo di questo fatto è particolarmente evidente quando si considera il laplaciano discretizzato su un reticolo



$$\Delta\varphi \approx \frac{1}{h^2} (\varphi(x-h, y) + \varphi(x+h, y) + \varphi(x, y-h) + \varphi(x, y+h) - 4\varphi(x, y))$$

Se  $\Delta\varphi = 0$  in  $P = (x, y)$ , allora

$$\varphi(P) = \frac{1}{4} [\text{somma dei valori di } \varphi \text{ nell'intorno di } P] = [\text{media di } \varphi \text{ nell'intorno di } P]$$

Anche i teoremi del massimo e minimo modulo sono essenzialmente teoremi sulle funzioni armoniche. A questo proposito, preliminarmente, osserviamo che il problema di determinare  $\varphi$  armonica in  $\mathcal{R}$  quando sono fissati i suoi valori sul bordo  $C = \partial\mathcal{R}$  va sotto il nome di *problema di Dirichlet*. È facile dimostrare che se la soluzione di un problema di Dirichlet esiste, allora è unica. Quel che è difficile è dimostrarne l'esistenza: quali proprietà deve avere la funzione sul bordo? Quanto irregolare può essere il bordo? Ritorneremo più avanti su questo.

Sia come sia, per un fisico, che ci siano casi in cui la soluzione esiste è ovvio: infatti, dal punto di vista della fisica, il problema è equivalente a stabilire che c'è una distribuzione stazionaria di temperatura nella regione  $\mathcal{R}$ , fissati i valori della temperatura sul bordo. Ovvio che c'è, basta aspettare che il transiente decada e si raggiunga l'equilibrio! La temperatura, infatti, soddisfa infatti l'equazione del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T$$

(per semplicità la costante di conducibilità è stata posta uguale a 1) e all'equilibrio si ha

$$\Delta T = 0.$$

In effetti, questo fu il modo di ragionare sia dei fisici sia dei matematici per lungo tempo, fino a che, agli inizi del Novecento, il grande matematico francese Henri Lebesgue non trovò un contro-esempio di una situazione in cui il problema di Dirichlet non ha soluzione. Ma adesso non vogliamo occuparci di questo. Vogliamo solo mettere in evidenza che i teoremi del massimo e minimo modulo per una funzione armonica significano che, in condizioni stazionarie, la temperatura non

può assumere i suoi valori massimi e minimi dentro  $\mathcal{R}$ , ma solo sul suo bordo, che ha una distribuzione di temperatura mantenuta fissata nell'esperimento. Analoghe considerazioni valgono per il potenziale elettrostatico e, in generale, per qualunque grandezza fisica che soddisfi l'equazione di Laplace.

### 6.1.5. *Teorema dell'argomento e Teorema di Rouché.*

Si tratta di due teoremi che, per il momento, ci limitiamo solo ad enunciare. Andrebbero discussi nell'ambito di una lezione sugli *indici di avvolgimento* ("winding numbers") e questioni topologiche in analisi complessa. Se avremo tempo lo faremo, altrimenti sarà per un'altra volta.

**Teorema** (dell'argomento). *Sia  $f(z)$  analitica dentro e lungo una curva semplice chiusa  $C$ , fatta eccezione per un numero finito di poli giacenti dentro  $C$ , allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

dove  $N$  e  $P$  sono rispettivamente il numero degli zeri e dei poli di  $f(z)$  dentro  $C$ .

**Teorema** (di Rouché). *Siano  $f(z)$  e  $g(z)$  analitiche dentro e lungo una curva semplice chiusa  $C$  e sia  $|g(z)| < |f(z)|$  lungo tutta  $C$ , allora  $f(z) + g(z)$  e  $f(z)$  hanno dentro  $C$  lo stesso numero di zeri.*

### 6.1.6. *Se $f$ è differenziabile una volta, lo è infinite volte.*

Questo è un teorema importante che merita una presentazione formale. Eccola.

**Proposizione 6.1.1.** *Se  $f$  è analitica, cioè esiste la derivata prima, allora esistono tutte le derivate di ordine superiore. La formula per la derivata  $n$ -esima è data dalla formula*

$$(2) \quad f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}$$

In particolare, per  $n = 1$  si ha

$$(3) \quad f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-a)^2}$$

È interessante osservare che la formula (3) equivale alla formula

$$\frac{d}{da} f(a) = \frac{d}{da} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \right\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{f(z)}{z-a} \right\}$$

che è un'estensione agli integrali di contorno della regola di Leibniz per la derivazione sotto il segno di integrale.

Incominciamo col convincerci che vale la formula (3). Ecco due metodi.

#### Metodo 1

Si introduca la funzione

$$F_a(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

La funzione è analitica dove  $f(z)$  è analitica in quanto la singolarità  $z = a$  è rimovibile. Si ha infatti

$$F_a(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a)$$

Applicando la formula di Cauchy a  $F_a(z)$ , otteniamo

$$f'(a) = F_a(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F_a(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - a)^2} dz - \frac{f(a)}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(z - a)^2} dz.$$

Ma l'ultimo integrale si annulla (lezione 5.1), quindi

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - a)^2} dz$$

che è la formula che volevamo dimostrare.

### Metodo 2

Calcoliamo la derivata nel punto  $a$  usando la formula di Cauchy. Siano  $a$  e  $a + h$  entrambi all'interno di  $\mathcal{R}$ , allora

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{z - (a + h)} - \frac{1}{z - a} \right] f(z) dz.$$

Ma

$$\frac{1}{z - (a + h)} - \frac{1}{z - a} = \frac{1}{(z - a - h)(z - a)} = \frac{h}{(z - a)^2} + \frac{h^2}{(z - a - h)(z - a)^2}$$

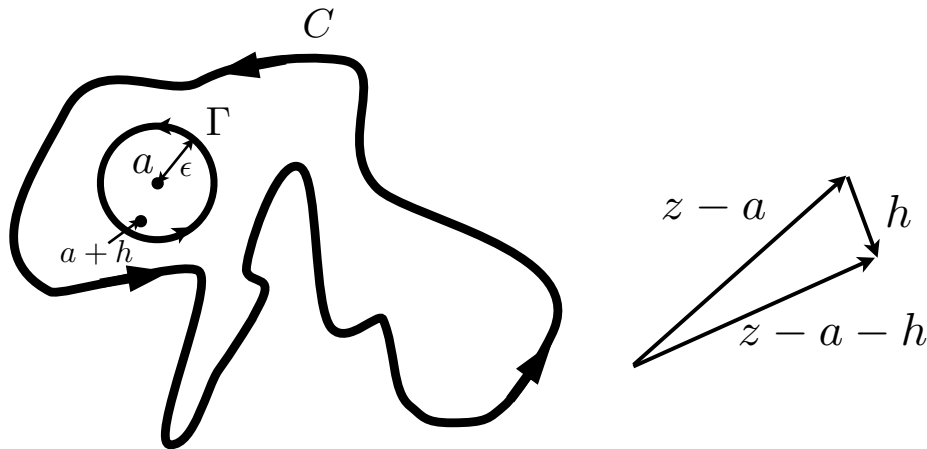
Quindi

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - a)^2} + \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - a - h)(z - a)^2}$$

Se si riesce a dimostrare che il secondo termine va a zero quando  $h$  va zero, si dimostra che  $f$  è derivabile in  $a$  e che il valore della sua derivata è dato dalla formula



Per dimostrarlo, si faccia uso del fatto che se  $\Gamma$  è un cerchio di raggio  $\epsilon$  e centro in  $a$  che giace completamente in  $\mathcal{R}$



allora,

$$\frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2} = \frac{h}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2}$$

Dato  $\epsilon$ , si può scegliere  $h$  in modulo abbastanza piccolo in modo che  $a+h$  si trovi dentro  $\Gamma$ , ad esempio  $|h| = \epsilon/2$ . Allora (la lunghezza di un lato di un triangolo è maggiore della differenza degli altri due)

$$|z-a-h| \geq |z-a| - |h| \geq \epsilon - \epsilon/2 = \epsilon/2$$

Ricordiamo la disuguaglianza incontrata nella lezione 5.1:

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq [\text{valore massimo di } |f(z)| \text{ lungo } C] \times [\text{lunghezza di } C]$$

Denotiamo con  $M$  il massimo di  $f(z)$  lungo  $\Gamma$  (che esiste, essendo  $f(z)$  analitica su  $\Gamma$ ). Si avrà

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-a-h)(z-a)^2} \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \frac{M 2\pi \epsilon}{(\epsilon/2)\epsilon^2} = \frac{2|h|M}{\epsilon^2}$$

Il membro di sinistra tende a 0 quando  $h \rightarrow 0$  e quindi la dimostrazione è completata.

\*\*\*

Il metodo 1 è certamente più veloce e brioso, il secondo più lento e noioso. Sarebbe bello poter dire: la formula (2) si dimostra sulla falsa riga del metodo 1, introducendo la funzione  $F_{a,n}(z)$ , con ovvio significato dei simboli. Ma non lo possiamo fare: il metodo 1 utilizza il fatto che  $f(z)$  è derivabile, in quanto analitica, ma lo stesso non vale per la derivata  $n$ -esima: lo scopo del gioco è proprio quello di dimostrare che  $f(z)$  è derivabile  $n$  volte. Per ottenere la formula (2) si deve seguire un adattamento del metodo 2. Questo metodo, infatti, non assume che esista la

derivata, ma mostra che esiste, calcolandola in maniera rigorosa con la formula di Cauchy. Dato questo suggerimento, si lascia come esercizio allo studente il compito dimostrare la proposizione 5.2.1.

**6.1.7. Disuguaglianza di Cauchy.** Se  $f(z)$  è analitica all'interno e lungo un cerchio  $C$  di raggio  $R$  e con centro in  $z = a$ , allora

$$(4) \quad |f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{R^n}$$

dove  $M$  è il valore massimo assunto da  $f(z)$  lungo  $C$ . Infatti, dalla (2) e dalla disuguaglianza della lezione 5.1.1 segue che

$$(5) \quad |f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{Mn!}{R^n}$$

**6.1.8. Serie di Taylor.**

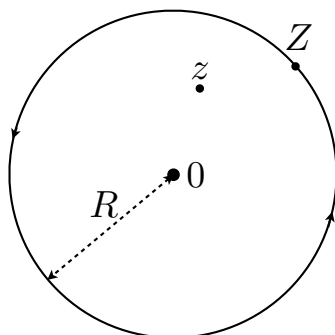
Vogliamo adesso mostrare che se  $f(z)$  è analitica all'interno e lungo un cerchio  $C$  di raggio  $R$ , per semplicità centrato nell'origine, allora  $f(z)$  può essere espressa come una serie di potenze

$$f(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots$$

che converge dentro al disco di raggio  $R$ . Per stabilire l'esistenza della serie, ritorniamo (per l'ennesima volta) alla formula di Cauchy. Con un cambiamento di notazione, questa può essere riscritta come

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(Z)}{Z-z} dZ = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(Z)}{Z} \left[ \frac{1}{1-(z/Z)} \right] dZ.$$

Poiché  $z$  è dentro al cerchio di raggio  $R$  su cui è  $Z$ , si ha  $|z| < |Z| = R$  e  $|z/Z| < 1$ .



Perciò  $1/[1-(z/Z)]$  può essere vista come la somma di una serie geometrica infinita, per cui

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(Z)}{Z} [1 + (z/Z) + (z/Z)^2 + (z/Z)^3 + \dots] dZ$$

A patto che sia possibile integrare la serie infinita termine per termine, deduciamo che  $f(z)$  può essere espresso come una serie di potenze:

$$(6) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ$$

Il confronto con (2) fornisce

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

che è la solita formula per i coefficienti della serie di Taylor.

Mostriamo che è possibile integrare la serie infinita termine a termine, mostrando che la somma  $f_N(z)$  dei primi  $N$  termini della serie (6) converge a  $f(z)$  quando  $N$  che tende all'infinito.

Usando la stessa formula per il resto della serie geometrica della lezione 2.1.1,

$$\frac{1}{1 - (z/Z)} - [1 + (z/Z) + (z/Z)^2 + \dots + (z/Z)^{N-1}] = \frac{(z/Z)^N}{1 - (z/Z)}$$

e quindi

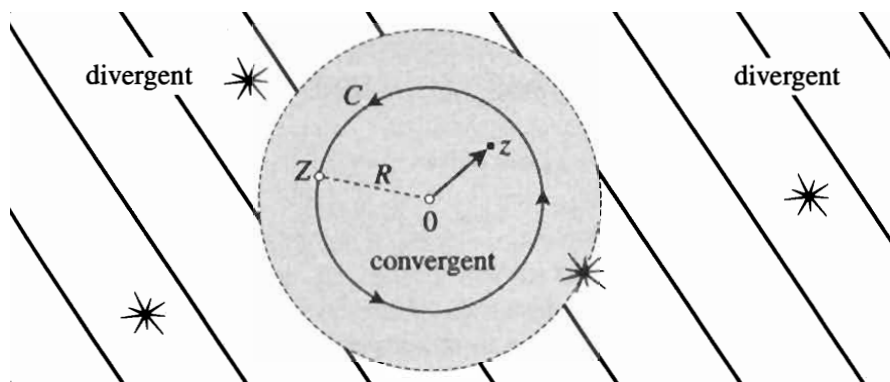
$$f(z) - f_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(Z)}{Z} \left[ \frac{(z/Z)^N}{1 - (z/Z)} \right] dZ = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{(z/Z)^N f(Z)}{Z - z} dZ$$

Ricordando la disuguaglianza della lezione 5.1.1, si ha

$$|f(z) - f_N(z)| \leq RM |(z/R)|^N$$

Perciò  $\lim f_N(z) = f(z)$ , che è quanto volevasi dimostrare.

Qual è il raggio di convergenza della serie che abbiamo ottenuto? Sappiamo che se  $f$  è analitica dentro  $C$ , allora la serie (6) converge a  $f(z)$  in quel disco. Perciò riferendoci alla figura



vediamo che  $C$  può essere espanso fino al cerchio tratteggiato, dove incontra la prima singolarità di  $f$ . Più in generale,  $f(z)$  potrebbe essere un ramo a un sol valore di una multifunzione e, come abbiamo imparato nella lezione 3.1.4, i punti di diramazione agiscono come un ostacolo tanto quanto i poli. Perciò risulta stabilito e dimostrato il principio che abbiamo introdotto fin dalla prima lezione: *il raggio*

di convergenza è la distanza dal centro di espansione alla singolarità più vicina, sia essa un polo, un punto di diramazione o una singolarità essenziale.

Se avessimo scelto un punto  $a$  come centro del cerchio, ben poco sarebbe cambiato: avremmo ottenuto un'espansione in  $a$  anziché nello zero. Saltiamo i passaggi (banali) e arriviamo alla conclusione, che riassumiamo sotto forma di proposizione.

**Proposizione 6.1.2.** *Sia  $f(z)$  analitica all'interno e lungo un cerchio  $C$  con centro in  $z = a$ . Allora*

$$(7) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{dove} \quad \frac{f^n(a)}{n!} = c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Il raggio massimo di convergenza della serie o, semplicemente, il raggio di convergenza  $R$  della serie, è la distanza tra il punto  $a$  e la singolarità più vicina.

### 6.1.9. Serie di Laurent.

Abbiamo già incontrato casi particolari di serie di Laurent (anche se non le abbiamo chiamate così) nella lezione 5 (5.1.3 e 5.1.4). Mi riferisco all'espansione centrata in un polo  $z = a$  della funzione altrimenti analitica  $f(z)$ . In quella lezione abbiamo visto che nell'intorno del polo di ordine  $m$  si ha

$$f(z) = \frac{\tilde{\Omega}(z)}{(z-a)^m}$$

dove  $\tilde{\Omega}$  è analitica e non nulla in  $a$ . Adesso sappiamo che se una funzione è analitica necessariamente ha uno sviluppo in serie, quindi

$$\tilde{\Omega}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad \text{dove} \quad b_n = \frac{\tilde{\Omega}^n(a)}{n!}$$

da cui deduciamo che  $f(z)$  ha una serie, detta di Laurent, della forma

$$(8) \quad f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)} \\ + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \dots$$

dove

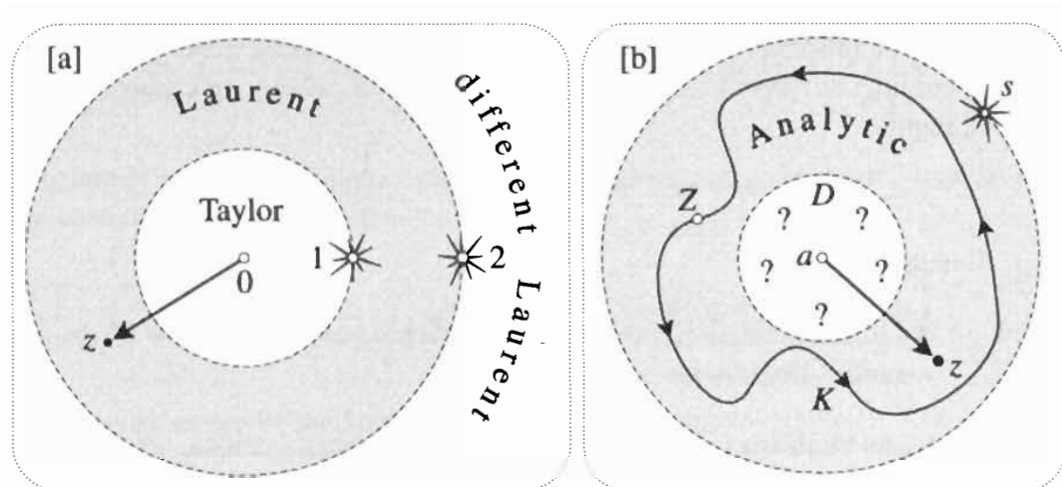
$$c_{-m} = b_0, \quad c_{-m+1} = b_1, \quad \dots, \quad c_0 = b_m, \quad c_1 = b_{m+1}, \quad \dots,$$

La parte in potenze negative di questa serie è detta *parte principale* della serie di Laurent. Il teorema di Laurent, stabilisce che un'espansione di questa forma esiste sempre.

**Teorema di Laurent.** *Sia  $f(z)$  analitica dappertutto dentro un anello  $A$  centrato in  $a$ . Allora*

$$(9) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(Z)}{(Z-a)^{n+1}} dZ$$

dove  $K$  è una qualunque curva semplice chiusa in  $A$ .

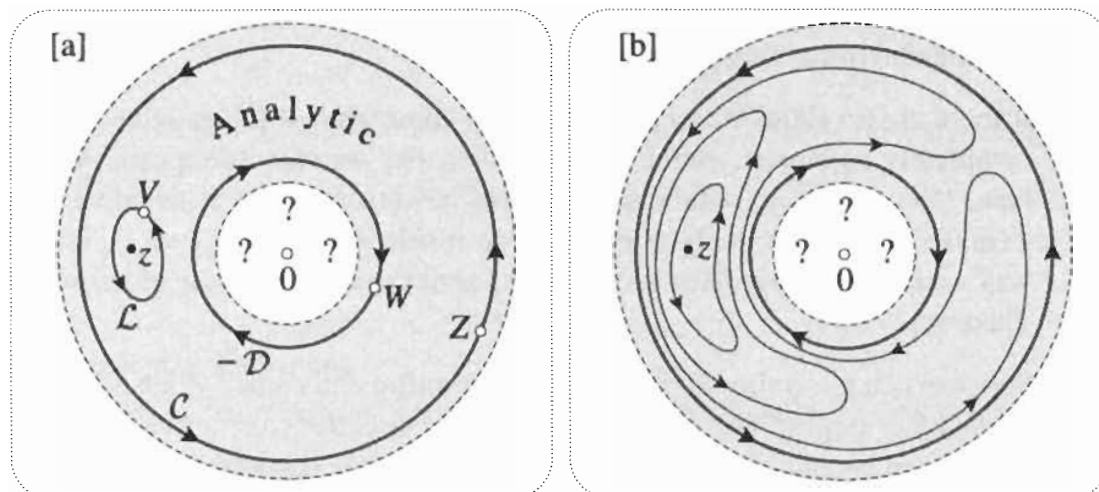


Prima di stabilire questo importante risultato facciamo alcuni commenti.

- Ciò che è sorprendente in questo risultato, è l'*esistenza* della serie di Laurent, non il fatto che converga in un anello. Poiché sappiamo che una serie di potenze in  $(z - a)$  converge dentro a un disco centrato in  $a$ , sappiamo anche che una serie di potenze in  $1/(z - a)$  convergerà fuori dal disco centrato in  $a$ . Essendo, per definizione, una serie di Laurent la somma di una serie di potenze in  $(z - a)$  e una serie di potenze in  $1/(z - a)$ , ne segue che la convergenza è in un anello.
- Sopra abbiamo dedotto l'esistenza di una serie in prossimità di un polo. Il Teorema di Laurent è molto più potente: non fa alcuna assunzione riguardo a quello che succede alla funzione nel disco interno  $D$  (vedi figura). In pratica, il disco esterno può essere espanso fino a incontrare la singolarità  $s$  di  $f(z)$ , e quello interno contratto fino a che non si raggiunge la singolarità più esterna che sta in  $D$ .
- Se non ci sono singolarità in  $D$ , il bordo interno può collassare completamente trasformando così l'anello in un disco. In questo caso, (9) non contiene potenze negative. Infatti, se  $n$  è negativo, allora  $f(Z)/(Z - a)^{n+1}$  è analitica dappertutto dentro  $K$  e quindi  $c_n = 0$ . In questo modo si ritrova l'esistenza della serie di Taylor come caso particolare del teorema di Laurent.
- Supponiamo che  $a$  sia una singolarità e che per  $\epsilon$  sufficientemente piccolo non ci siano altre singolarità in una distanza  $\epsilon$  da  $a$ . In altre parole,  $a$  è una singolarità isolata. Applicando il teorema di Laurent all'anello  $0 < |z - a| < \epsilon$ , realizziamo che ci sono due differenti possibilità: o la parte principale ha un numero finito di termini o ne ha infiniti. Se il numero è finito  $a$  è un polo, se è infinito, è una singolarità essenziale del tipo di

quella che abbiamo incontrato per  $e^{1/z}$ . Morale: una singolarità isolata o è un polo o è una singolarità essenziale.

Passiamo alla dimostrazione del teorema. Semplifichiamoci la vita e prendiamo  $a = 0$ . Notazioni:  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  sono cerchi percorsi in senso antiorario, tali che  $z$  è compreso tra di loro;  $\mathcal{L}$  è un circuito (loop) semplice antiorario attorno a  $z$ , che sta dentro l'anello:



Suddividiamo la dimostrazione in tappe.

1. Dalla formula di Cauchy otteniamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(V)}{V-z} dV = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z-z} dZ - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} \frac{f(W)}{W-z} dW$$

La seconda identità segue dal fatto che  $\mathcal{L}$  può essere deformato in  $(\mathcal{C}) + (-\mathcal{D})$ , come indicato in figura [b] (si veda l'esempio 2, all'inizio della lezione).

2. Riscriviamo l'equazione precedente come

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z} \left[ \frac{1}{1-(z/Z)} \right] dZ + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} \frac{f(W)}{z} \left[ \frac{1}{1-(W/z)} \right] dW.$$

Il significato di questo è che  $|(z/Z)| < 1$  e  $|(W/z)| < 1$ , cosicché entrambi gli integrandi a secondo membro possono essere espansi in serie geometriche.

3. Procedendo come per la serie di Taylor, per l'integrale lungo  $\mathcal{C}$  otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z} \left[ \frac{1}{1-(z/Z)} \right] dZ = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ \right] z^n$$

4. Un ragionamento sostanzialmente identico giustifica l'integrazione termine a termine dell'integrale attorno a  $\mathcal{D}$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} \frac{f(W)}{z} \left[ \frac{1}{1-(W/z)} \right] dW = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} W^{n-1} f(W) dW \right] \left( \frac{1}{z} \right)^n.$$

5. L'esistenza della serie di Laurent è stabilita:

$$f(z) = \dots + \frac{d_3}{z^3} + \frac{d_2}{z^2} + \frac{d_1}{z^1} + c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots ,$$

dove

$$d_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{D}} W^{m-1} f(W) dW \quad \text{e} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ$$

6. Due osservazioni conclusive permettono di rifinire il risultato ed arrivare alla tesi del teorema:

- Gli integrali che definiscono  $d_m$  e  $c_n$  non cambiano se permettiamo a  $\mathcal{C}$  di contrarsi e a  $\mathcal{D}$  di espandersi fino a che non si fondono nello stesso loop semplice  $K$  contenuto nell'anello.
- Se scriviamo  $m = -n$  l'integrale che definisce il coefficiente  $d_{-n}$  di  $z^n$  ha integrando  $W^{-n-1} f(W) = f(W)/W^{n+1}$ , che è lo stesso integrando dei  $c_n$ .

Arriviamo così alla forma compatta

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(Z)}{(Z-a)^{n+1}} dZ$$

che è proprio la (9) del teorema.