

1. Proprietà generali delle funzioni armoniche. Problemi di Dirichlet e di Neumann.

L'equazione di Laplace nello spazio euclideo n -dimensionale

$$\Delta\varphi = 0,$$

dove

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (\text{in coordinate cartesiane})$$

si presenta in questioni di svariata natura. Particolarmente rilevanti per la fisica sono i casi $n = 2$ e $n = 3$. Avendo discusso a lezione alcuni aspetti del caso $n = 2$, forniamo qui un trattamento un po' più generale per $n = 3$, cioè per l'equazione di Laplace nello spazio fisico tri-dimensionale. Ogni sua soluzione *regolare* (cioè finita e continua con le sue derivate prime e che ha derivate seconde) in una regione \mathcal{R} si chiama *funzione armonica* in \mathcal{R} .

Una sua prima ed importante proprietà è la seguente: *la media, $\bar{\varphi}_S$, dei valori che una funzione armonica φ in \mathcal{R} assume su di una sfera qualsiasi interna a \mathcal{R} , è uguale al valore che φ assume al centro di tale sfera.* Vale a dire, se P , r e S sono rispettivamente centro, raggio e superficie della sfera considerata e $\varphi(P)$ è il valore di φ al centro di P , e se si pone

$$(1) \quad \bar{\varphi}_S = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \varphi dS,$$

il teorema (della media di Gauss) afferma che $\bar{\varphi}_S$ è indipendente da r e precisamente si ha

$$\varphi(P) = \bar{\varphi}_S$$

Per dimostrarlo, assumiamo coordinate sferiche r, θ, ϕ (con l'usuale convenzione della fisica che θ è la co-latitudine e ϕ la longitudine). Allora

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

da cui

$$\bar{\varphi}_S = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \varphi(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta$$

Questa quantità, fissato il punto P , risulterà funzione, al più, di r . Studiamo come varia questa funzione nella direzione radiale \mathbf{n} , il versore normale alla sfera, cioè studiamo la derivata direzionale $\nabla_{\mathbf{n}}$ di $\bar{\varphi}_S$,

$$\nabla_{\mathbf{n}} \bar{\varphi}_S \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla \bar{\varphi}_S = \int_S \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS$$

Detta V la sfera piena, $\partial V = S$, usando il teorema della divergenza otteniamo

$$\int_S \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \nabla \varphi dV = \int_V \Delta \varphi dV = 0$$

perché V è armonica in P . Allora $\bar{\varphi}_S$ è una costante che non dipende dal raggio. Per determinare la costante, passiamo al limite $r \rightarrow 0$ nella (1) ottenendo così

$$\bar{\varphi}_S = \varphi(P),$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Un corollario notevole è che: *$\varphi(P)$ è pure la media dei valori che φ assume nei punti interni della sfera S .* Basta infatti supporre di calcolare tale media servendosi di strati sferici di spessore infinitesimo e concentrici alla sfera S .

Un altro corollario molto importante (che estende quanto visto a lezione per le funzioni analitiche) è che: *una funzione armonica φ in una regione \mathcal{R} , non può avere dentro \mathcal{R} punti di massimo e di minimo.* Infatti, se nel punto P interno a \mathcal{R} vi fosse, per esempio, un massimo, esisterebbe

un intorno di P tale che in tutti i suoi punti sarebbe $\varphi < \varphi(P)$ e quindi per una sferetta di centro P interna ad esso si avrebbe $\bar{\varphi}_S < \varphi(P)$, contrariamente a quanto è stato appena dimostrato. Il massimo e minimo dei valori di φ dovranno dunque necessariamente trovarsi sul bordo $\partial\mathcal{R}$.

Da questo corollario e dalla continuità di φ segue che: *se φ ha un valore costante su tutta una superficie chiusa $S = \partial\mathcal{R}$, allora ha quello stesso valore in tutto lo spazio \mathcal{R} interno ad S .* In particolare, *se φ è zero sul bordo di \mathcal{R} , allora è zero in tutto \mathcal{R} .*

Vista la grande importanza di quest'ultimo teorema, ne diamo un'altra dimostrazione che si presta meglio a generalizzazioni. Applichiamo il teorema della divergenza al campo $\mathbf{F} = \varphi \nabla \varphi$, ottenendo

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\mathcal{R}} \varphi \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS,$$

e ricordando l'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) = \varphi \nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi = \varphi \Delta \varphi + (\nabla \varphi)^2$$

e che $\Delta \varphi = 0$ in \mathcal{R} , se ne deduce che

$$\int_{\mathcal{R}} (\nabla \varphi)^2 dV = \int_{\partial\mathcal{R}} \varphi \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS.$$

Se, ora, $\varphi = 0$ su tutto il bordo $\partial\mathcal{R}$, il secondo integrale si annullerà e si avrà

$$(2) \quad \int_{\mathcal{R}} (\nabla \varphi)^2 dV = 0$$

e quindi, poiché la funzione integranda non può mai essere negativa,

$$\nabla \varphi = 0 \quad \text{ossia} \quad \varphi = \text{cost.} \quad (\text{in } \mathcal{R})$$

Si può ora dimostrare il teorema di unicità: *se di una funzione φ , armonica dentro la regione finita \mathcal{R} , si assegnano i valori sul contorno $\partial\mathcal{R}$, la funzione è univocamente determinata in tutto \mathcal{R} .* Infatti, supponiamo che esistano due funzioni φ_1 e φ_2 , regolari, armoniche dentro \mathcal{R} e con lo stesso valore assegnato f sul bordo,

$$\varphi_1|_{\partial\mathcal{R}} = \varphi_2|_{\partial\mathcal{R}} = f.$$

Allora, poiché $\Delta \varphi_1 = 0$ e $\Delta \varphi_2 = 0$, anche la loro differenza $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ sarà armonica: sarà $\Delta \psi = 0$ dentro \mathcal{R} e ψ si annullerà sul bordo. Per il teorema precedente $\psi = 0$, cioè $\varphi_1 = \varphi_2$, la soluzione è unica, che è quanto si voleva dimostrare.

Il problema di determinare una funzione φ armonica dentro la regione \mathcal{R} , quando sono noti i valori che assume sul contorno di \mathcal{R} , va sotto il nome di *problema di Dirichlet*. Il teorema precedente ci dice che il problema non può ammettere più di una soluzione. Ben più difficile è dimostrare che esista una soluzione. Al riguardo, in fisica si tende ad utilizzare il metodo costruttivo di Green. Questo metodo verrà studiato nel corso di MMF 2.

Servendosi della (2) è pure possibile dare un altro teorema di unicità [esercizio]: *se di una funzione φ , armonica dentro la regione finita \mathcal{R} , si assegnano i valori della sua derivata normale $\nabla_{\mathbf{n}} \varphi$ sul contorno $\partial\mathcal{R}$, la funzione è determinata in tutto \mathcal{R} a meno di una costante additiva arbitraria.*

Il problema di determinare una funzione φ armonica dentro la regione \mathcal{R} , quando sono noti i valori della sua derivata normale sul contorno, va sotto il nome di *problema di Neumann*.

Il senso dei due problemi risulta chiaro se si fa riferimento all'elettrostatica: il problema di Dirichlet equivale a determinare il potenziale elettrostatico in una regione di spazio priva di cariche quando è assegnato il potenziale sul bordo della regione: chiaramente la soluzione è unicamente determinata dai valori del potenziale sul bordo. Il problema di Neumann corrisponde a determinare il potenziale in una situazione analoga, quando però sul bordo (immaginiamo una

superficie conduttrice) è assegnato il campo elettrico (che è normale alla superficie conduttrice). In questo caso, è chiaro che il potenziale è determinato a meno di una costante additiva arbitraria.

2. Il teorema di Liouville della meccanica hamiltoniana. Un sistema dinamico non è altro che un sistema (fisico, biologico, economico, etc), la cui evoluzione temporale è governata da equazioni differenziali ordinarie, quando queste equazioni sono scritte come un sistema di equazioni differenziali del prim'ordine, cioè nella forma

$$(3) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (tralasciamo complicazioni dovute a vincoli che richiedono che \mathbb{R}^n sia sostituito da una varietà differenziabile) e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ è un campo vettoriale su \mathbb{R}^n , detto campo di velocità. \mathbb{R}^n è detto lo *spazio delle fasi* del sistema. La condizione che \mathbf{v} non dipenda dal tempo non è restrittiva: se dipendesse dal tempo basterebbe aggiungere la variabile $x_{n+1} = t$ e passare al sistema in \mathbb{R}^{n+1} con equazione aggiuntiva $\dot{x}_{n+1} = 1$. La meccanica hamiltoniana fornisce una classe di sistemi dinamici: quelli per cui $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e il campo di velocità è ottenuto per derivazione da una funzione $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, detta hamiltoniana,

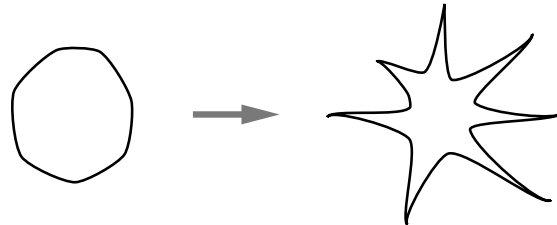
$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right)$$

(quindi lo spazio delle fasi ha dimensione pari se l'hamiltoniana non dipende dal tempo).

Per un sistema dinamico generico del tipo (3), assumendo abbastanza regolarità sul campo \mathbf{v} (condizione purtroppo non verificata nei casi di principale interesse fisico, come la meccanica celeste), la soluzione esiste ed è unica. La soluzione è da intendere come una famiglia ad un parametro di funzioni $\mathbf{f}_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, detta *flusso*, che trasforma gli stati \mathbf{x} del sistema ad un tempo arbitrario negli stati \mathbf{y} dopo un tempo t ,

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x})$$

Il flusso trasforma dunque una qualunque regione \mathcal{R} dello spazio delle fasi in un'altra regione



Per studiare come varia il volume della regione si procede come segue. Come sempre, data una trasformazione, è utile conoscere le sue proprietà locali. Per t infinitesimo, diciamo δt , si ottiene

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_{\delta t}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x})\delta t$$

Le proprietà locali sono espresse dalla matrice Jacobiana

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \delta t$$

dove \mathbf{I} è la matrice identica e $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x}$ è la matrice con elementi $\partial v_i / \partial x_j$. La variazione del volume è data dal determinante jacobiano

$$\mathcal{J} = \det \mathbf{J} = \det \left(\mathbf{I} + \delta t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

Ricordando l'importante formula

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$$

e osservando che, essendo δt infinitesimo,

$$1 + \delta t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = e^{\delta t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}}$$

si ottiene

$$\mathcal{J} = e^{\delta t \nabla \cdot \mathbf{v}}$$

in quanto la traccia della matrice Jacobiana è la somma degli elementi diagonali $\partial v_i / \partial x_i$, che è proprio la divergenza del campo \mathbf{v} . Abbiamo posto uguale a 1 lo jacobiano al tempo t perché abbiamo calcolato la variazione tra il tempo t e il tempo $t + \delta t$ assumendo che al tempo t la trasformazione fosse l'identità. Fossimo partiti da un tempo anteriore a t , e posto uguale a 1 lo jacobiano a quel tempo, avremmo trovato

$$\mathcal{J}(t + \delta t) = \mathcal{J}(t) e^{\delta t \nabla \cdot \mathbf{v}}$$

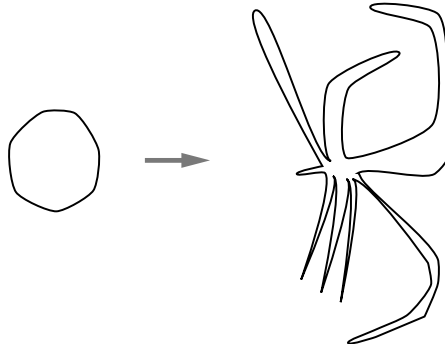
Poiché δt è infinitesimo,

$$\mathcal{J}(t + \delta t) = \mathcal{J}(t) + \delta t \nabla \cdot \mathbf{v} \mathcal{J}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mathcal{J}(t)} \frac{\mathcal{J}(t + \delta t) - \mathcal{J}(t)}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

da cui

$$\frac{1}{\mathcal{J}} \frac{d\mathcal{J}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Dunque, *il tasso di variazione percentuale di volume nell'intorno di un punto dello spazio del fasi è dato dalla divergenza del campo di velocità in quel punto*: questo è il **teorema di Liouville!** Nei sistemi dissipativi (per esempio, nel famoso sistema di Lorenz che diede il via alla ripresa degli studi sul caos nella seconda metà del Novecento) la divergenza è tipicamente negativa. Se la divergenza è zero, la dinamica può deformare le regioni dello spazio delle fasi in modo orrendo



ma non può cambiarne il volume. Questo è il caso dei sistemi hamiltoniani, per i quali

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0$$