

**1. Proprietà generali delle funzioni armoniche. Problemi di Dirichlet e di Neumann.**

L'equazione di Laplace nello spazio euclideo  $n$ -dimensionale

$$\Delta\varphi = 0,$$

dove

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (\text{in coordinate cartesiane})$$

si presenta in questioni di svariata natura. Particolarmente rilevanti per la fisica sono i casi  $n = 2$  e  $n = 3$ . Avendo discusso a lezione alcuni aspetti del caso  $n = 2$ , forniamo qui un trattamento un po' più generale per  $n = 3$ , cioè per l'equazione di Laplace nello spazio fisico tri-dimensionale. Ogni sua soluzione *regolare* (cioè finita e continua con le sue derivate prime e che ha derivate seconde) in una regione  $\mathcal{R}$  si chiama *funzione armonica* in  $\mathcal{R}$ .

Una sua prima ed importante proprietà è la seguente: *la media,  $\bar{\varphi}_S$ , dei valori che una funzione armonica  $\varphi$  in  $\mathcal{R}$  assume su di una sfera qualsiasi interna a  $\mathcal{R}$ , è uguale al valore che  $\varphi$  assume al centro di tale sfera.* Vale a dire, se  $P$ ,  $r$  e  $S$  sono rispettivamente centro, raggio e superficie della sfera considerata e  $\varphi(P)$  è il valore di  $\varphi$  al centro di  $P$ , e se si pone

$$(1) \quad \bar{\varphi}_S = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S \varphi dS,$$

il teorema (della media di Gauss) afferma che  $\bar{\varphi}_S$  è indipendente da  $r$  e precisamente si ha

$$\varphi(P) = \bar{\varphi}_S$$

Per dimostrarlo, assumiamo coordinate sferiche  $r, \theta, \phi$  (con l'usuale convenzione della fisica che  $\theta$  è la co-latitudine e  $\phi$  la longitudine). Allora

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

da cui

$$\bar{\varphi}_S = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \varphi(r, \theta, \phi) \sin \theta d\theta$$

Questa quantità, fissato il punto  $P$ , risulterà funzione, al più, di  $r$ . Studiamo come varia questa funzione nella direzione radiale  $\mathbf{n}$ , il versore normale alla sfera, cioè studiamo la derivata direzionale  $\nabla_{\mathbf{n}}$  di  $\bar{\varphi}_S$ ,

$$\nabla_{\mathbf{n}} \bar{\varphi}_S \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla \bar{\varphi}_S = \int_S \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS$$

Detta  $V$  la sfera piena,  $\partial V = S$ , usando il teorema della divergenza otteniamo

$$\int_S \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \nabla \varphi dV = \int_V \Delta \varphi dV = 0$$

perché  $V$  è armonica in  $P$ . Allora  $\bar{\varphi}_S$  è una costante che non dipende dal raggio. Per determinare la costante, passiamo al limite  $r \rightarrow 0$  nella (1) ottenendo così

$$\bar{\varphi}_S = \varphi(P),$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Un corollario notevole è che:  *$\varphi(P)$  è pure la media dei valori che  $\varphi$  assume nei punti interni della sfera  $S$ .* Basta infatti supporre di calcolare tale media servendosi di strati sferici di spessore infinitesimo e concentrici alla sfera  $S$ .

Un altro corollario molto importante (che estende quanto visto a lezione per le funzioni analitiche) è che: *una funzione armonica  $\varphi$  in una regione  $\mathcal{R}$ , non può avere dentro  $\mathcal{R}$  punti di massimo e di minimo.* Infatti, se nel punto  $P$  interno a  $\mathcal{R}$  vi fosse, per esempio, un massimo, esisterebbe

un intorno di  $P$  tale che in tutti i suoi punti sarebbe  $\varphi < \varphi(P)$  e quindi per una sferetta di centro  $P$  interna ad esso si avrebbe  $\bar{\varphi}_S < \varphi(P)$ , contrariamente a quanto è stato appena dimostrato. Il massimo e minimo dei valori di  $\varphi$  dovranno dunque necessariamente trovarsi sul bordo  $\partial\mathcal{R}$ .

Da questo corollario e dalla continuità di  $\varphi$  segue che: *se  $\varphi$  ha un valore costante su tutta una superficie chiusa  $S = \partial\mathcal{R}$ , allora ha quello stesso valore in tutto lo spazio  $\mathcal{R}$  interno ad  $S$ .* In particolare, *se  $\varphi$  è zero sul bordo di  $\mathcal{R}$ , allora è zero in tutto  $\mathcal{R}$ .*

Vista la grande importanza di quest'ultimo teorema, ne diamo un'altra dimostrazione che si presta meglio a generalizzazioni. Applichiamo il teorema della divergenza al campo  $\mathbf{F} = \varphi \nabla \varphi$ , ottenendo

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\mathcal{R}} \varphi \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS,$$

e ricordando l'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) = \varphi \nabla \cdot \nabla \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi = \varphi \Delta \varphi + (\nabla \varphi)^2$$

e che  $\Delta \varphi = 0$  in  $\mathcal{R}$ , se ne deduce che

$$\int_{\mathcal{R}} (\nabla \varphi)^2 dV = \int_{\partial\mathcal{R}} \varphi \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS.$$

Se, ora,  $\varphi = 0$  su tutto il bordo  $\partial\mathcal{R}$ , il secondo integrale si annullerà e si avrà

$$(2) \quad \int_{\mathcal{R}} (\nabla \varphi)^2 dV = 0$$

e quindi, poiché la funzione integranda non può mai essere negativa,

$$\nabla \varphi = 0 \quad \text{ossia} \quad \varphi = \text{cost.} \quad (\text{in } \mathcal{R})$$

Si può ora dimostrare il teorema di unicità: *se di una funzione  $\varphi$ , armonica dentro la regione finita  $\mathcal{R}$ , si assegnano i valori sul contorno  $\partial\mathcal{R}$ , la funzione è univocamente determinata in tutto  $\mathcal{R}$ .* Infatti, supponiamo che esistano due funzioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , regolari, armoniche dentro  $\mathcal{R}$  e con lo stesso valore assegnato  $f$  sul bordo,

$$\varphi_1|_{\partial\mathcal{R}} = \varphi_2|_{\partial\mathcal{R}} = f.$$

Allora, poiché  $\Delta \varphi_1 = 0$  e  $\Delta \varphi_2 = 0$ , anche la loro differenza  $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$  sarà armonica: sarà  $\Delta \psi = 0$  dentro  $\mathcal{R}$  e  $\psi$  si annullerà sul bordo. Per il teorema precedente  $\psi = 0$ , cioè  $\varphi_1 = \varphi_2$ , la soluzione è unica, che è quanto si voleva dimostrare.

Il problema di determinare una funzione  $\varphi$  armonica dentro la regione  $\mathcal{R}$ , quando sono noti i valori che assume sul contorno di  $\mathcal{R}$ , va sotto il nome di *problema di Dirichlet*. Il teorema precedente ci dice che il problema non può ammettere più di una soluzione. Ben più difficile è dimostrare che esista una soluzione. Al riguardo, in fisica si tende ad utilizzare il metodo costruttivo di Green. Questo metodo verrà studiato nel corso di MMF 2.

Servendosi della (2) è pure possibile dare un altro teorema di unicità [esercizio]: *se di una funzione  $\varphi$ , armonica dentro la regione finita  $\mathcal{R}$ , si assegnano i valori della sua derivata normale  $\nabla_{\mathbf{n}} \varphi$  sul contorno  $\partial\mathcal{R}$ , la funzione è determinata in tutto  $\mathcal{R}$  a meno di una costante additiva arbitraria.*

Il problema di determinare una funzione  $\varphi$  armonica dentro la regione  $\mathcal{R}$ , quando sono noti i valori della sua derivata normale sul contorno, va sotto il nome di *problema di Neumann*.

Il senso dei due problemi risulta chiaro se si fa riferimento all'elettrostatica: il problema di Dirichlet equivale a determinare il potenziale elettrostatico in una regione di spazio priva di cariche quando è assegnato il potenziale sul bordo della regione: chiaramente la soluzione è unicamente determinata dai valori del potenziale sul bordo. Il problema di Neumann corrisponde a determinare il potenziale in una situazione analoga, quando però sul bordo (immaginiamo una

superficie conduttrice) è assegnato il campo elettrico (che è normale alla superficie conduttrice). In questo caso, è chiaro che il potenziale è determinato a meno di una costante additiva arbitraria.

**2. Il teorema di Liouville della meccanica hamiltoniana.** Un sistema dinamico non è altro che un sistema (fisico, biologico, economico, etc), la cui evoluzione temporale è governata da equazioni differenziali ordinarie, quando queste equazioni sono scritte come un sistema di equazioni differenziali del prim'ordine, cioè nella forma

$$(3) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

dove  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  (tralasciamo complicazioni dovute a vincoli che richiedono che  $\mathbb{R}^n$  sia sostituito da una varietà differenziabile) e  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$  è un campo vettoriale su  $\mathbb{R}^n$ , detto campo di velocità.  $\mathbb{R}^n$  è detto lo *spazio delle fasi* del sistema. La condizione che  $\mathbf{v}$  non dipenda dal tempo non è restrittiva: se dipendesse dal tempo basterebbe aggiungere la variabile  $x_{n+1} = t$  e passare al sistema in  $\mathbb{R}^{n+1}$  con equazione aggiuntiva  $\dot{x}_{n+1} = 1$ . La meccanica hamiltoniana fornisce una classe di sistemi dinamici: quelli per cui  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$  e il campo di velocità è ottenuto per derivazione da una funzione  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , detta hamiltoniana,

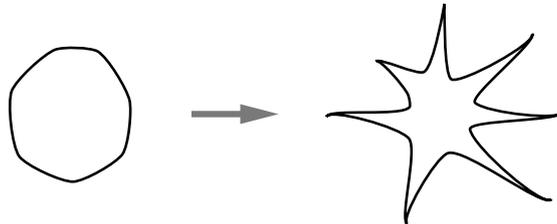
$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right)$$

(quindi lo spazio delle fasi ha dimensione pari se l'hamiltoniana non dipende dal tempo).

Per un sistema dinamico generico del tipo (3), assumendo abbastanza regolarità sul campo  $\mathbf{v}$  (condizione purtroppo non verificata nei casi di principale interesse fisico, come la meccanica celeste), la soluzione esiste ed è unica. La soluzione è da intendere come una famiglia ad un parametro di funzioni  $\mathbf{f}_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , detta *flusso*, che trasforma gli stati  $\mathbf{x}$  del sistema ad un tempo arbitrario negli stati  $\mathbf{y}$  dopo un tempo  $t$ ,

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x})$$

Il flusso trasforma dunque una qualunque regione  $\mathcal{R}$  dello spazio delle fasi in un'altra regione



Per studiare come varia il volume della regione si procede come segue. Come sempre, data una trasformazione, è utile conoscere le sue proprietà locali. Per  $t$  infinitesimo, diciamo  $\delta t$ , si ottiene

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}_{\delta t}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x})\delta t$$

Le proprietà locali sono espresse dalla matrice Jacobiana

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \delta t$$

dove  $\mathbf{I}$  è la matrice identica e  $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x}$  è la matrice con elementi  $\partial v_i / \partial x_j$ . La variazione del volume è data dal determinante jacobiano

$$\mathcal{J} = \det \mathbf{J} = \det \left( \mathbf{I} + \delta t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \right)$$

Ricordando l'importante formula

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$$

e osservando che, essendo  $\delta t$  infinitesimo,

$$1 + \delta t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = e^{\delta t \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}}$$

si ottiene

$$\mathcal{J} = e^{\delta t \nabla \cdot \mathbf{v}}$$

in quanto la traccia della matrice Jacobiana è la somma degli elementi diagonali  $\partial v_i / \partial x_i$ , che è proprio la divergenza del campo  $\mathbf{v}$ . Abbiamo posto uguale a 1 lo jacobiano al tempo  $t$  perché abbiamo calcolato la variazione tra il tempo  $t$  e il tempo  $t + \delta t$  assumendo che al tempo  $t$  la trasformazione fosse l'identità. Fossimo partiti da un tempo anteriore a  $t$ , e posto uguale a 1 lo jacobiano a quel tempo, avremmo trovato

$$\mathcal{J}(t + \delta t) = \mathcal{J}(t) e^{\delta t \nabla \cdot \mathbf{v}}$$

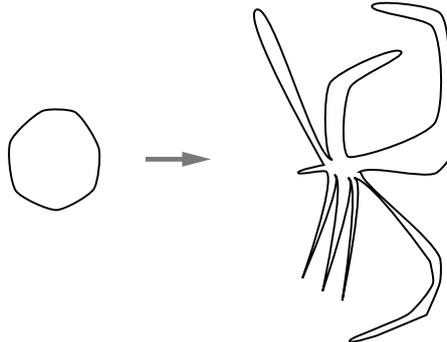
Poiché  $\delta t$  è infinitesimo,

$$\mathcal{J}(t + \delta t) = \mathcal{J}(t) + \delta t \nabla \cdot \mathbf{v} \mathcal{J}(t) \Rightarrow \frac{1}{\mathcal{J}(t)} \frac{\mathcal{J}(t + \delta t) - \mathcal{J}(t)}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

da cui

$$\frac{1}{\mathcal{J}} \frac{d\mathcal{J}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Dunque, *il tasso di variazione percentuale di volume nell'intorno di un punto dello spazio del fasi è dato dalla divergenza del campo di velocità in quel punto*: questo è il **teorema di Liouville!** Nei sistemi dissipativi (per esempio, nel famoso sistema di Lorenz che diede il via alla ripresa degli studi sul caos nella seconda metà del Novecento) la divergenza è tipicamente negativa. Se la divergenza è zero, la dinamica può deformare le regioni dello spazio delle fasi in modo orrendo



ma non può cambiarne il volume. Questo è il caso dei sistemi hamiltoniani, per i quali

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left( -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) = 0$$