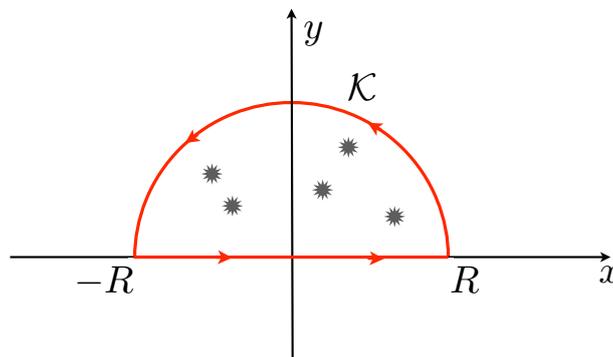


8.1. **Calcolo di integrali reali con il metodo dei residui II.** = Morali generali tratte dagli esercizi 7.2.

8.1.1. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Le funzioni integrandi degli esercizi (1) e (2) sono un caso particolare della classe di integrali per i quali

- $f(z)$ è analitica nel semipiano superiore Π^+ eccetto per un numero finito di poli.
- $f(z)$ decade più rapidamente di $1/z$ per $|z| \rightarrow \infty$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi$.

Allora, in questo caso, si utilizza il cammino chiuso



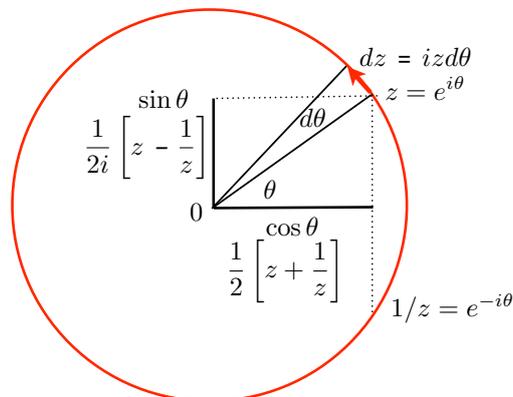
e l'integrale è

$$I = 2\pi i \sum \text{residui nel semipiano superiore } \Pi^+$$

8.1.2. $I = \int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta)d\theta$. Sia

- f finita per tutti i valori di θ ,
- f una funzione razionale di $\sin \theta$ e $\cos \theta$.

Allora si procede come nell'esercizio (5), con le regole del gioco riassunte dalla figura



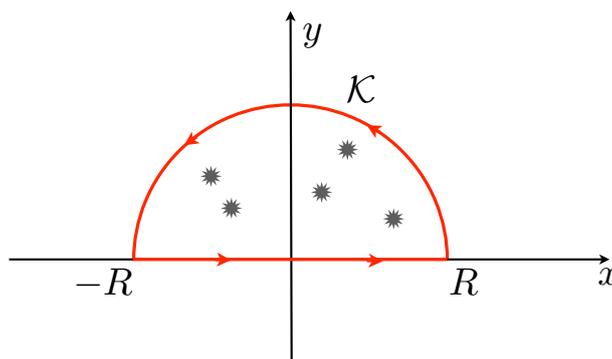
L'integrale è

$$I = (-i)2\pi i \sum \text{residui nel cerchio unitario}$$

8.1.3. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx}dx$ (**Lemma di Jordan**). Questo è un integrale (o trasformata) di Fourier. Dall'esercizio (6) si tra la seguente morale. Sia

- $f(z)$ è analitica nel semipiano superiore Π^+ eccetto per un numero finito di poli.
- $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ per $0 \leq \arg(z) \leq \pi$.

Allora, per $k > 0$, come nell'esercizio (6) (attenzione al cambiamento di segno di k) si utilizza il cammino chiuso



Infatti, sotto le sopraddette condizioni su f , l'integrale lungo il semicerchio di raggio R si annulla quando R tende all'infinito. Questo fatto è noto come *Lemma di Jordan*. Vediamone la dimostrazione (che estende quanto visto nell'esercizio (6)). Sia

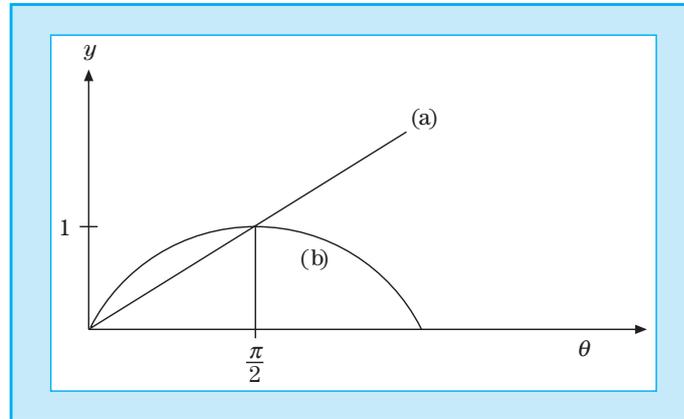
$$I_R = \int_{\mathcal{K}} f(z)e^{ikz} dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})e^{ikR\cos\theta - kR\sin\theta} iRe^{i\theta} d\theta$$

Sia R così grande che $|f(z)| = |f(Re^{i\theta})| < \epsilon$. Allora

$$|I_R| \leq \epsilon R \int_0^{\pi} e^{-kR\sin\theta} d\theta = 2\epsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-kR\sin\theta} d\theta.$$

Nell'intervallo $[0, \pi/2]$, si ha che $(2/\pi)\theta \leq \sin \theta$, come mostrato in figura

- (a) $y = (2/\pi)\theta$;
 (b) $y = \sin \theta$



e quindi

$$|I_R| \leq 2\epsilon R \int_0^{\pi/2} e^{-kR2\theta/\pi} d\theta.$$

Integrando,

$$|I_R| \leq 2\epsilon R \frac{1 - e^{-kR}}{kR2/\pi}$$

da cui

$$|I_R| \leq \frac{\pi}{k} \epsilon.$$

Risulta così dimostrato che $\lim_{R \rightarrow \infty} |I_R| = 0$.

In conclusione,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx} dx = 2\pi i \sum \text{residui nel semipiano superiore } \Pi^+ \quad (k > 0)$$

Nel caso in cui

- $f(z)$ è analitica nel semipiano inferiore Π^- eccetto per un numero finito di poli.
- $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ per $-\pi \leq \arg(z) \leq 2\pi$.

si avrà, come nell'esercizio (6) (tenuto conto del verso di integrazione),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx} dx = -2\pi i \sum \text{residui nel semipiano inferiore } \Pi^- \quad (k < 0)$$