

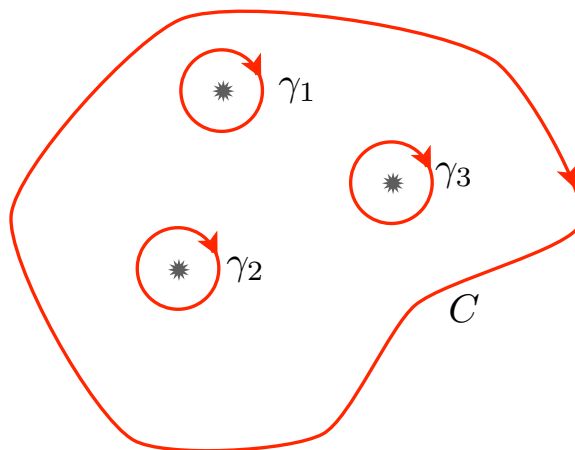
## 9.1. Ancora integrali.

9.1.1. **Ci sono modi “veloci” per calcolare i residui?** Mi è stata fatta questa domanda durante l’esercitazione in classe. Ecco una (parziale) risposta:

- (1) Il residuo di una funzione in un punto  $a$  (singolarità isolata) è il coefficiente  $c_{-1}$  del suo sviluppo di Laurent in  $a$ . Talvolta è facile determinare la serie di Laurent sia a partire da serie già note (Es.  $e^{1/z}$ ) sia facendo la sostituzione  $z = w + a$  e sviluppando in serie di  $w$ ; il residuo è il coefficiente di  $1/w$ .
- (2) Se  $a$  è una singolarità isolata e  $\gamma$  è un piccolo cerchio attorno a  $a$  che non contiene alcun punto singolare della funzione, allora

$$\text{Res}(f, a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$$

Si ponga  $z = a + \epsilon e^{i\theta}$  e si faccia tender  $\epsilon$  a zero. A volte questo è un metodo efficiente per calcolare il residuo. Si tenga sempre presente che il gioco che stiamo giocando è quello del teorema di Cauchy



$$\oint_C = \sum \oint_{\gamma_i} = 2\pi i \sum \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_i} \right) = 2\pi i \sum \text{Res}(f, a_i) = \sum 2\pi i c_{-1}^{(i)}$$

- (3) Se  $a$  è un polo semplice e  $f(z)$  è della forma  $f(z) = Q(z)/P(z)$  e  $Q(a) \neq 0$ , allora

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} Q(z) \frac{z - a}{P(z)} = \frac{Q(a)}{P'(a)}$$

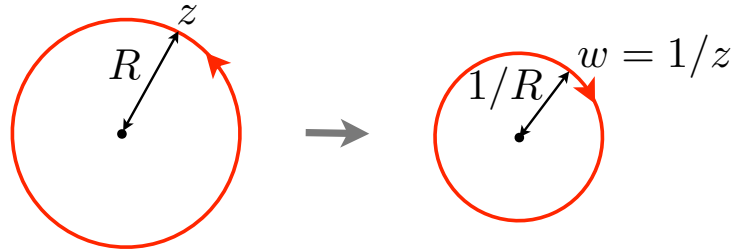
Avendo applicato la regola dell'Hospital. Situazioni analoghe, ma più complicate, si trattano applicando la regola dell'Hospital più volte.

9.1.2. **Residui all'infinito.** Il teorema dei residui dà il valore di un integrale di contorno in termini dei residui nei poli racchiusi dal contorno  $C$ . Risulta utile introdurre il concetto di *residuo all'infinito* e riformulare lo schema della valutazione degli integrali di contorno in termini di punti singolari *al di fuori* del contorno  $C$ .

Per spiegare l'idea di base, consideriamo la valutazione dell'integrale

$$I = \oint_C f(z) dz$$

dove  $C$  è un cerchio di raggio  $R$  orientato positivamente, cioè in senso *antiorario*. Mediante il cambiamento di variabili  $w = 1/z$ , l'integrale precedente è trasformato in un integrale di contorno nel piano- $w$ . L'immagine del cerchio  $|z| = R$  rispetto alla mappa di inversione  $z \mapsto w = 1/z$ , è il cerchio  $C'$  dato da  $|w| = 1/R$  percorso nel senso *orario*.



Perciò,

$$I = \oint_C f(z) dz = - \oint_{C'} f(1/w) \frac{dw}{w^2} = \oint_{C''} g(w) dw$$

dove  $C''$  è il cerchio  $|w| = 1/R$  percorso nel senso *antiorario* e

$$g(w) = w^{-2} f(1/w)$$

I punti singolari di  $g(w)$  *dentro* al cerchio  $C''$  corrispondono a punti singolari di  $f(z)$  *fuori* dal cerchio  $C$ . In più, l'integrale può ricevere un contributo non nullo dal punto  $w = 0$  che corrisponde al punto all'infinito nel piano- $z$ . Per una funzione  $f(z)$ , la natura della singolarità all'infinito è la stessa della natura della singolarità di  $f(1/w)$  in  $w = 0$ . In particolare,  $\infty$  è una singolarità isolata di  $f(z)$  se  $0$  è una singolarità isolata di  $f(1/w)$ . In tal caso, per un contorno  $\gamma$  antiorario attorno all'infinito, tale che  $\infty$  è la sola singolarità al di fuori di esso,

$$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'} f(z) dz$$

dove  $\gamma'$  è la stessa curva  $\gamma$ , ma orientata in senso antiorario attorno all'origine. Mediante il cambio di variabili  $w = 1/z$ , si ottiene anche

$$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma''} w^{-2} f(1/w) dw$$

dove  $\gamma''$  è un contorno nell'intorno di  $w = 0$ , tale che al suo interno  $f(1/w)$  non ha singolarità.

Si osservi che mentre una funzione analitica in un punto nel piano complesso finito ha un residuo zero in quel punto, una funzione che non è singolare all'infinito, può avere in esso un residuo non nullo. Per esempio,  $1/z$  è analitica all'infinito ma ha un residuo pari a  $-1$ .

9.1.3. *Integrale di una funzione con punti di diramazione.* Vogliamo calcolare l'integrale

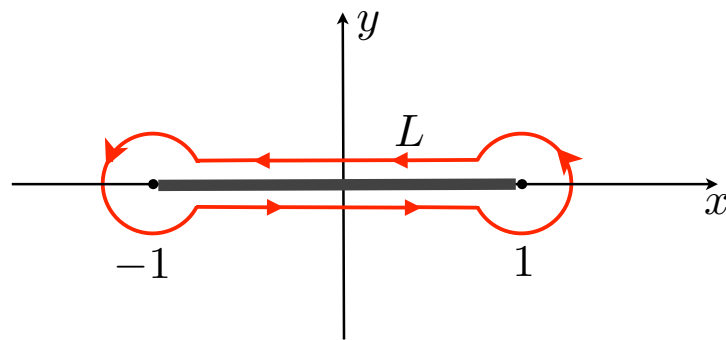
$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

con i metodi del calcolo complesso. L'integrale è banale: lo si determina agevolmente con i metodi del calcolo reale mediante la sostituzione  $x = \cos \theta$  e ancora più agevolmente con quelli della geometria:  $I$  è l'area del semicerchio di raggio 1 e quindi  $I = \pi/2$ . Usiamo questo integrale come palestra per integrali più complicati che contengono punti di diramazione.

Consideriamo la multifunzione che abbiamo già incontrato varie volte

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{(z-1)(z+1)}$$

Ha punti di diramazione semplici per  $z = +1$  e  $z = -1$ . Scegliamo come taglio il segmento che unisce  $z = +1$  e  $z = -1$  e consideriamo il ramo principale della multifunzione corrispondente al ramo  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $z = e^{i\theta}$ . Adesso consideriamo il contorno a "cappio"



Per  $z$  sull'asse reale appena sopra il taglio (diciamo per  $z = x + i\epsilon$ ,  $\epsilon \downarrow 0$ ), abbiamo

$$(z^2 - 1)^{1/2} = i\sqrt{1-x^2}$$

mentre appena sotto

$$(z^2 - 1)^{1/2} = -i\sqrt{1-x^2}$$

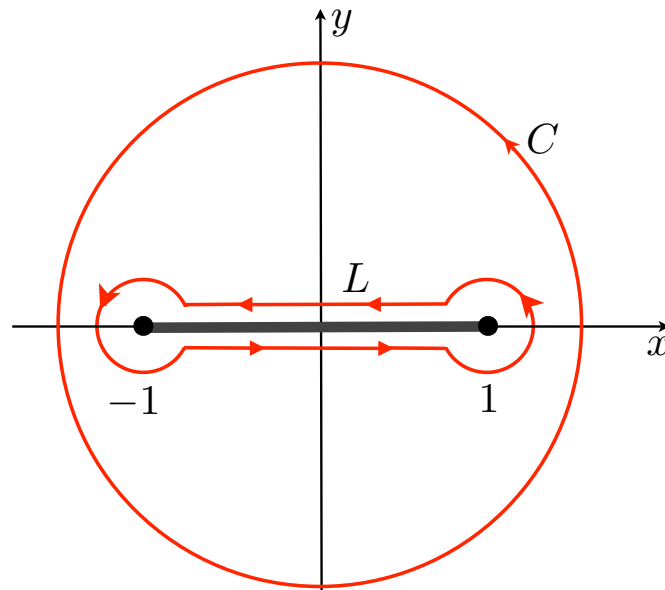
Sia  $L$  il contorno chiuso mostrato in figura, dove intorno a  $+1$  e  $-1$  ci sono due percorsi circolari di raggio  $\delta$  che aggirano i punti di diramazione. Nel limite  $\delta \downarrow 0$  gli integrali lungo questi percorsi circolari danno contributo nullo (verificare!) e quindi

$$\oint_L (z^2 - 1)^{1/2} dz = \int_1^{-1} i\sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^1 (-i\sqrt{1-x^2}) dx = -2iI,$$

da cui

$$I = \frac{1}{2}i \oint_L (z^2 - 1)^{1/2} dz.$$

Possiamo deformare il contorno d'integrazione da  $L$  a  $C$ , il cerchio di raggio  $R$ , poiché non ci sono singolarità tra  $L$  e  $C$ ,



e ottenere

$$I = \frac{1}{2}i \oint_C (z^2 - 1)^{1/2} dz.$$

Essendo la funzione integranda regolare in ogni regione finita al di fuori dal cerchio, calcoliamo questo integrale in termini di residuo della funzione all'infinito. Sia  $w = 1/z$  e sia  $C'$  il cerchio di raggio  $1/R$  percorso in senso *orario*, cosicché  $C'$  è l'immagine di  $C$  rispetto alla trasformazione  $z \mapsto w = 1/z$ . Allora  $dz = -w^{-2}dw$  e

$$I = I = \frac{1}{2}i \oint_{C'} \left( \frac{1}{w^2} - 1 \right)^{1/2} \left( -\frac{1}{w^2} \right) dw = \frac{1}{2}i \oint_{C''} \left( \frac{1}{w^2} - 1 \right)^{1/2} \frac{1}{w^2} dw$$

dove  $C''$  è la stessa curva  $C'$  percorsa in senso antiorario. Ora,

$$\frac{1}{w^2} \left( \frac{1}{w^2} - 1 \right)^{1/2} = \frac{1}{w^3} (1 - w^2)^{1/2} = \frac{1}{w^3} \left( 1 - \frac{1}{2}w^2 + \dots \right)$$

Quindi la funzione integranda ha un residuo in  $w = 0$  pari a  $-\frac{1}{2}$ . In definitiva,

$$I = \frac{1}{2}i \times 2\pi i \times \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Probabilmente, questo è il modo più complicato di mostrare che l'area del semicerchio di raggio 1 è  $\pi/2$ . Ma lo scopo era (fortunatamente) un altro: illustrare come calcolare integrali in cui compaiono punti di diramazione e mettere in evidenza che per questi integrali torna utile la nozione di residuo all'infinito.