

9.2. Funzioni generalizzate e integrali regolarizzati.

9.2.1. **Funzioni generalizzate.** Lasciamo per un momento da parte l'analisi complessa e occupiamoci di un argomento che prima o poi spunta fuori in un corso di metodi matematici della fisica: la delta di Dirac. Questo argomento si presta ad essere trattato a svariati livelli di sofisticazione o di rozzezza. Noi ne daremo una trattazione breve e elementare, ma rigorosa¹. Per approfondimenti si veda il corso di MM2.

Definizione 1. Una **funzione buona** è una funzione reale $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, che è infinitamente differenziabile e tale che $f(x)$ e le sue derivate decrescono all'infinito più rapidamente di qualunque potenza negativa di $|x|$.

Esempio 1. e^{-x^2} è una funzione buona.

Definizione 2. Una **funzione abbastanza buona** è una funzione $\phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, che è infinitamente differenziabile e tale che $\phi(x)$ e le sue derivate crescono all'infinito al più come una qualche potenza positiva di $|x|$.

Esempio 2. Qualunque polinomio è una funzione abbastanza buona.

Teorema 1. La derivata di una funzione buona è una funzione buona. La somma di due funzioni buone è una funzione buona. Il prodotto di una funzione buona e di una funzione abbastanza buona è una funzione buona.

Definizione 3. Una successione $f_n(x)$ di funzioni buone è chiamata **regolare** se, per qualunque funzione buona $F(x)$, il limite

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) F(x) dx$$

esiste.

Esempio 3. La successione e^{-x^2/n^2} è regolare. In questo caso il limite è $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$.

Definizione 4. Due successioni di funzioni regolari sono chiamate **equivalenti** se, per qualunque funzione buona $F(x)$, il limite (1) è lo stesso per ciascuna successione.

Esempio 4. La successione e^{-x^4/n^4} è equivalente alla successione e^{-x^2/n^2} .

Definizione 5. Una **funzione generalizzata** (o distribuzione) $f(x)$ è definita come una successione regolare $f_n(x)$ di funzioni buone. Due funzioni generalizzate sono dette uguali se le corrispondenti successioni regolari sono equivalenti. Perciò ciascuna funzione generalizzata è in realtà la classe di tutte le successioni regolari equivalenti ad una data successione regolare. L'integrale

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F(x) dx$$

¹Nella trattazione e nella terminologia seguiamo quasi verbatim M. J. Lighthill, *An introduction to Fourier Analysis and generalized functions*, Cambridge University Press.

del prodotto di una funzione generalizzata $f(x)$ e una funzione buona $F(x)$ è definito come

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) F(x) dx$$

Questo è ammissibile perché il limite è lo stesso per tutte le successioni equivalenti $f_n(x)$.

Esempio 5. La successione e^{-x^2/n^2} e tutte le successioni equivalenti definiscono una funzione generalizzata $I(x)$ tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x) F(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$$

È abbastanza naturale denotare $I(x)$ semplicemente con 1, la funzione che vale 1.

Definizione 6. Se due funzioni generalizzate $f(x)$ e $h(x)$ sono definite dalle successioni $f_n(x)$ e $h_n(x)$ allora la loro somma $f(x) + h(x)$ è definita dalla successione $f_n(x) + h_n(x)$. Inoltre, la derivata $f'(x)$ è definita dalla successione $f'_n(x)$. Inoltre, $f(ax + b)$ è definita dalla successione $f_n(ax + b)$. Inoltre, $\phi(x)f(x)$, dove $\phi(x)$ è una funzione abbastanza buona, è definita dalla successione $\phi(x)f_n(x)$.

DIMOSTRAZIONE DI CONSISTENZA. In ciascun punto di questa definizione occorre verificare (i) che la successione nominata è una successione di buone funzioni, ma questo segue immediatamente dal Teorema 1; (ii) che la successione nominata è una successione regolare; (iii) che scelte differenti di successioni regolari equivalenti che definiscono le funzioni generalizzate $f(x)$ e $h(x)$ portano a successioni equivalenti che definiscono la nuova funzione generalizzata. Questa verifica è semplice e si basa su fatti elementari di analisi reale.

Per quel che riguarda il punto (ii), per ogni funzione buona $F(x)$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f_n(x) + h_n(x)] F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) F(x) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) F(x) dx$$

e così il limite sulla sinistra esiste, e quindi la successione $f_n + h_n$ è regolare. Inoltre i limiti a destra sono indipendenti da quali tra le differenti successioni equivalenti di f_n e h_n sono utilizzate per definire f e h . Quindi, tutte le successioni risultanti $f_n + h_n$ sono equivalenti, verificando così (iii). Inoltre, per integrazione per parti,

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f'_n(x) F(x) dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) F'(x) dx$$

e poiché, per il teorema 1, $F'(x)$ è una funzione buona, il limite a destra esiste e è lo stesso, per le definizioni 3 e 4, per tutte le successioni regolari equivalenti $f_n(x)$. Quindi tutte le successioni $f'_n(x)$ sono equivalenti e regolari, che è quanto si voleva

dimostrare. Lo stesso argomento si applica pari pari per

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(ax+b)F(x)dx = \frac{1}{|a|} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F\left(\frac{x-b}{a}\right) dx$$

e

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\phi(x)f_n(x)] F(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) [\phi(x)F(x)] dx$$

Teorema 2. *Sotto le condizioni della definizione 6, per qualunque funzione buona $F(x)$ si ha*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)F(x)dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F'(x)dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b)F(x)dx &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} [\phi(x)f(x)] F(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\phi(x)F(x)] dx \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione segue immediatamente dalle equazioni (5), (6) e (7).

9.2.2. La funzione delta di Dirac.

Teorema 3. *Le successioni equivalenti a $\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}$ definiscono una funzione generalizzata $\delta(x)$, detta delta di Dirac, tale che per qualunque funzione buona $F(x)$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)F(x)dx = F(0)$$

DIMOSTRAZIONE. Se $F(x)$ è una qualunque funzione buona

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} F(x)dx - F(0) \right| &= \left| \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} (F(x) - F(0)) dx \right| \\ &\leq \max|F'(x)| \left| \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} |x| dx \right| = \max|F'(x)| \sqrt{\frac{1}{n\pi}} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Nella prima disuguaglianza si è usato

$$|F(x) - F(0)| \leq \max|F'(x)||x|$$

che non è altro che il teorema del valor medio per funzioni continue e differenziabili in $[a, b]$ secondo cui esiste ξ in $[a, b]$ tale che $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. Nell'ultima uguaglianza ci si è avvalsi della formula

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} |x| dx = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

che si ottiene facilmente per integrazione diretta

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2} |x| dx = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-nx^2} x dx = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-nx^2} (2xn) dx = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

Teorema 4. *Per qualunque funzione buona $F(x)$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) F(x) dx = (-1)^n F^{(n)}(0)$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dall'applicazione ripetuta n volte della prima equazione del Teorema 2 (integrazione per parti) e, ovviamente, dalla caratterizzazione della delta data dal Teorema 3.

Sulla base dei teoremi 2 e 3 si dimostrano agevolmente altre proprietà della delta che si incontrano nei testi di fisica. La funzione delta può essere estesa a più dimensioni, ad esempio

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

È sulla base di questa estensione che l'equazione della divergenza del campo elettrico, in presenza di cariche q_i poste nei punti \mathbf{r}_i , può essere scritta come

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

9.2.3. *Due commenti sulla delta.*

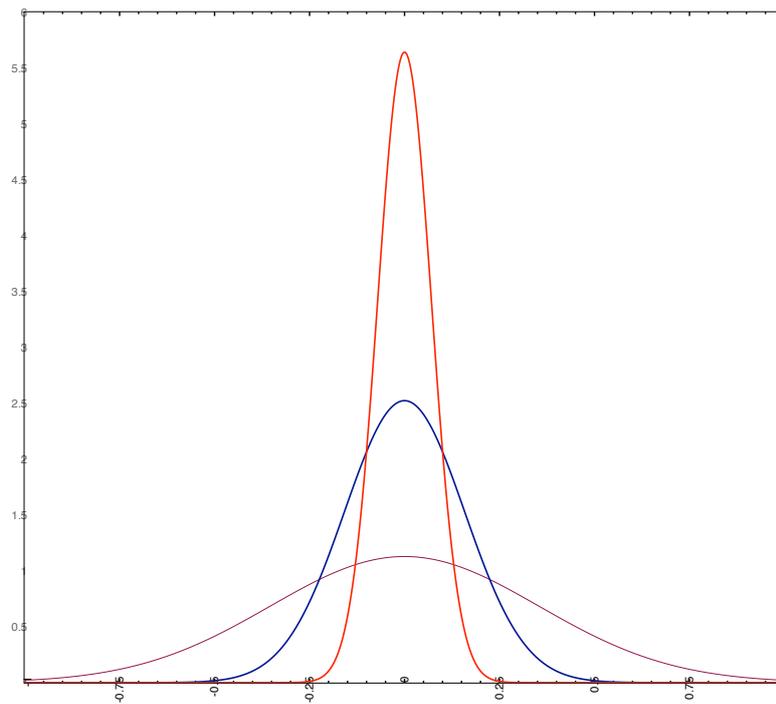
1. Così come nella pratica — ad esempio nella simulazione numerica — un numero reale è approssimato da un numero con un numero finito di cifre dopo la virgola, una funzione generalizzata, nella pratica, è approssimata da una buona funzione. Per la delta,

$$\delta(x) \approx \delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$$

per n abbastanza grande (a seconda della precisione richiesta). In questo caso

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) F(x) dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) F(x) dx \approx F(0)$$

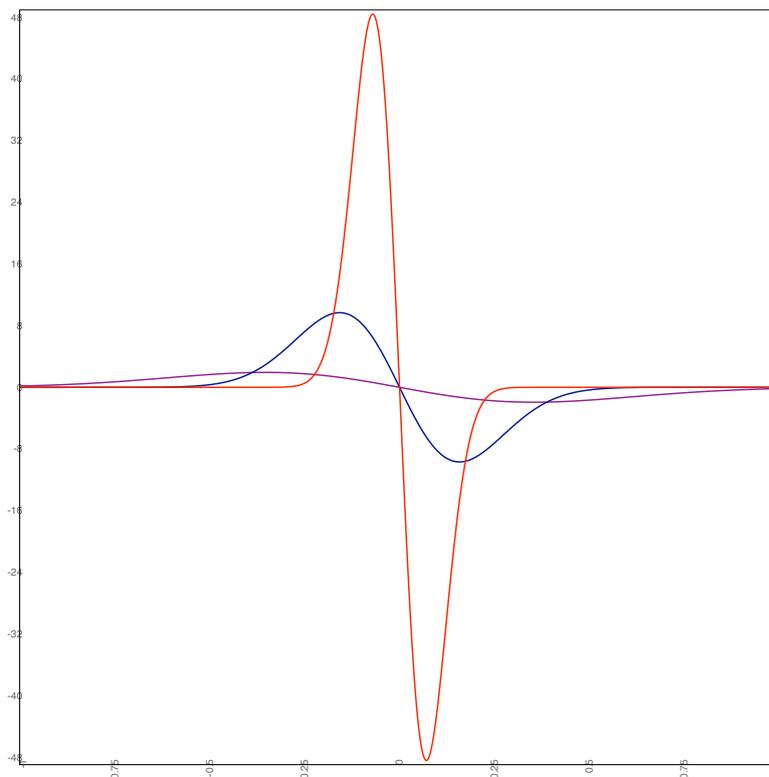
La figura sotto mostra le approssimazioni per $n = 4, 20, 100$.



Analogo discorso per la derivata della delta,

$$\delta'(x) \approx \delta'_n(x) = -2n\sqrt{\frac{n}{\pi}}xe^{-nx^2}$$

che ha un grafico del tipo



La figura rende evidente che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)F(x)dx \approx \frac{F(x-h) - F(x+h)}{2h} \approx -F'(0)$$

con h infinitesimo per n grande. Se la delta è una distribuzione di carica positiva concentrata in una piccola regione di spazio, la sua derivata è un dipolo, con cariche di segno opposto molto vicine.

2. Domanda: “*Se lo scopo è dare un significato preciso alla delta e alla sua derivata, perché richiedere che le funzione buone siano infinitamente differenziabili e vadano a zero all’infinito più velocemente di qualunque potenza? Non basta richiedere che siano derivabili una volta e permettere un comportamento all’infinito meno restrittivo?*”

Risposta: “*Ottima domanda. Se lo scopo fosse stato solo questo, avremmo potuto essere molto più liberali e fornire condizioni meno stringenti. Ma lo scopo non era solo questo. In vista dell’esigenza di estendere la trasformata di Fourier alle funzioni generalizzate, ci siamo scelti fin d’ora un buon spazio di buone funzioni, buone anche per la trasformata di Fourier.*”