

## 10.2. Interpretazione fisica delle conseguenze del teorema di Cauchy.

Riprendiamo i punti importanti della lezione 4.2: Per  $H(z) = H_x(x, y) + iH_y(x, y)$ ,  $z = x + iy$ , il campo coniugato è

$$\overline{\mathbf{H}}(x, y) = H_x(x, y)\mathbf{e}_x - H_y(x, y)\mathbf{e}_y \leftrightarrow \overline{H(z)},$$

Allora

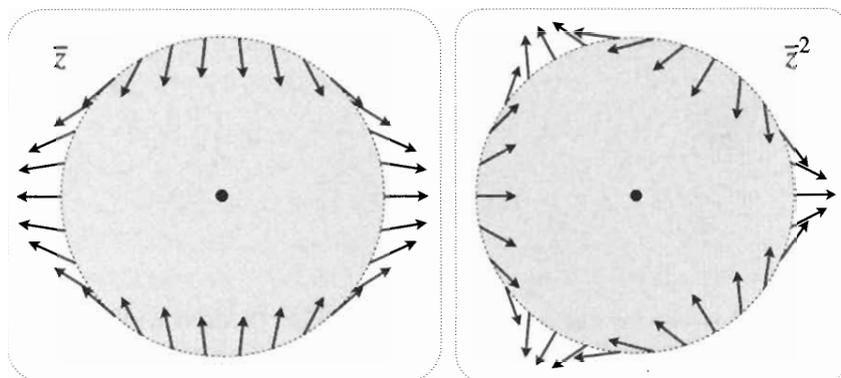
$$\begin{aligned} \oint_C H(z)dz &= \mathcal{C}(\overline{\mathbf{H}}, C) + i\mathcal{F}(\overline{\mathbf{H}}, C) \\ &= \oint_C \overline{\mathbf{H}} \bullet d\mathbf{r} + i \oint_C \overline{\mathbf{H}} \bullet \mathbf{N} ds \\ &= \iint_{\mathcal{R}} \nabla \times \overline{\mathbf{H}} dS + i \iint_{\mathcal{R}} \nabla \bullet \overline{\mathbf{H}} dS \end{aligned}$$

### 10.2.1. Residui = cariche.

**Potenze positive.** Se  $n$  è un intero positivo  $z^n$  è analitica dappertutto e il suo campo coniugato  $\overline{z^n}$  è corrispondentemente a divergenza nulla e a rotore nullo e quindi

$$\oint_C z^n dz = \mathcal{C}(\overline{z^n}, C) + i\mathcal{F}(\overline{z^n}, C) = 0,$$

Nel caso di un cerchio, riusciamo a rendere questa interpretazione fisica del teorema di Cauchy particolarmente trasparente con una figura in cui disegniamo il comportamento delle linee di flusso del “fluido”  $\overline{z}$  e del “fluido”  $\overline{z^2}$ ,



Tanto fluido entra nel disco quanto ne esce: il flusso è zero. Se interpretiamo il campo come un campo di forze, la circolazione è il lavoro fatto dalle forze nel trasportare una particella intorno al bordo di ciascun disco e anche questo è zero.

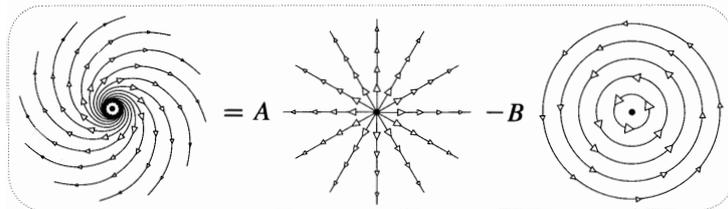
Possiamo rendere questa idea più precisa. In primo luogo, osserviamo che flusso e circolazione non cambiano se ruotiamo la figura di  $\pi/2$ . Ma ruotare la figura di  $\overline{z}$  di  $\pi/2$  dà il negativo del campo originario e quindi il negativo di flusso e circolazione<sup>1</sup>. Poiché flusso e circolazione devono rimanere gli stessi in conseguenza

<sup>1</sup>È buona cosa avere chiaro come in generale si trasforma la “figura” di un campo per effetto di una rotazione o più in generale di una qualunque trasformazione  $R$  che trasforma lo spazio su

di una rotazione, devono entrambi annullarsi. (Lo stesso argomento si applica a  $\overline{z^2}$  per una rotazione di  $\pi/3$  e a  $\overline{z^n}$  per una rotazione di  $\pi/(n+1)$ ).  
Potenza  $m = -1$ . Sia  $q = A + iB$ . Allora, come abbiamo già visto,

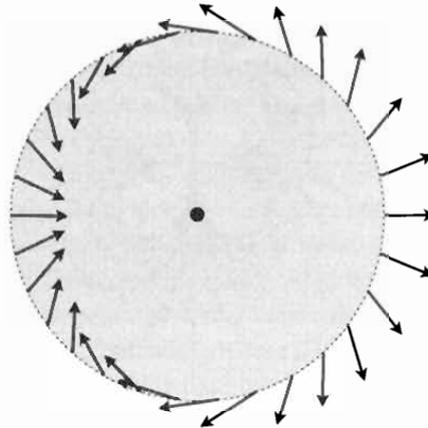
$$\oint_C \frac{q}{z} dz = 2\pi i q = -2\pi B + i2\pi A.$$

Graficamente,

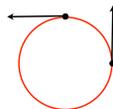


**Potenze negative.** Consideriamo le potenze negative ( $1/z^m$ ), dove  $m$  è positivo. Il campo coniugato ( $1/\overline{z^m}$ ) sarà a divergenza nulla e a rotore nullo in tutti i punti eccetto nell'origine dove è singolare. Perciò se  $C$  non include l'origine circolazione e flusso si annullano. Tuttavia, eccetto il caso  $m = 1$ , si annullano anche se l'origine è inclusa. Lo abbiamo dimostrato analiticamente, ma non è rimasto un po' misterioso perché succede questo?

Consideriamo il campo ( $1/z^2$ ). La sua geometria è rappresentata dalla figura



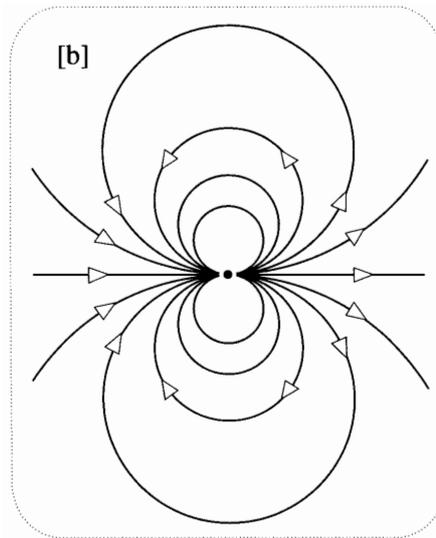
cui il campo è definito. La regola vale per qualunque campo vettoriale in qualunque dimensione, ma formuliamola per campi complessi: sia  $f(z)$  il campo e  $R$  la trasformazione. Allora il campo ruotato  $f'$  risulta così definito:  $f'(Rz) = Rf(z)$ , cioè, il valore del campo nel punto ruotato è uguale a quello ruotato del punto di partenza, ovvero  $f'(z) = Rf(R^{-1}z)$ .



Nel caso in questione  $f'(z) = if(-iz)$ , da cui  $f'(z) = i(\overline{-iz}) = -\bar{z}$ .

E l'argomento geometrico per comprendere che circolazione e flusso si annullano è lo stesso di prima: per una rotazione di  $\pi$  il campo cambia di segno, ma circolazione e flusso devono restare inalterate e quindi devono annullarsi. Ma qual è la spiegazione *fisica*?

Disegniamo le linee di forza di  $(1/\bar{z}^2)$ :



Le linee di forza appaiono circolari e, in effetti, lo sono, come è facile dimostrare. Ricordano le linee di forza di un dipolo e, in effetti, lo sono. La carica totale di un dipolo è zero, flusso e circolazione si elidono perché il dipolo è ottenuto portando molto vicine due cariche di eguale modulo ma di segno opposto, un pozzo e una sorgente della stessa intensità. Verifichiamo che le cose stanno davvero così.

Il campo di una sorgente di carica  $q$  nel piano posta nel punto  $P$  è

$$\frac{q}{2\pi} \frac{1}{\bar{z} - \bar{P}}$$

Un doppietto con sorgente di carica  $s$  in  $A$  e pozzo di di carica  $-q$  in  $B$  genera un campo

$$D = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{\bar{z} - \bar{A}} + \frac{-q}{2\pi} \frac{1}{\bar{z} - \bar{B}}$$

Supponiamo che pozzo e sorgente si avvicinino all'origine muovendosi lungo una linea  $L$  che fa un angolo  $\phi$  con l'asse reale. La linea  $L$  è chiamata l'*asse di simmetria* del dipolo. Poniamo  $A = \epsilon e^{i\phi} = -B$ . Allora il campo del doppietto diventa

$$D = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{\bar{z} - \epsilon e^{-i\phi}} + \frac{-q}{2\pi} \frac{1}{\bar{z} + \epsilon e^{-i\phi}} = \left[ \frac{2\epsilon q e^{i\phi}}{2\pi} \right] \frac{1}{(\bar{z}^2 - \epsilon^2 e^{-i2\phi})},$$

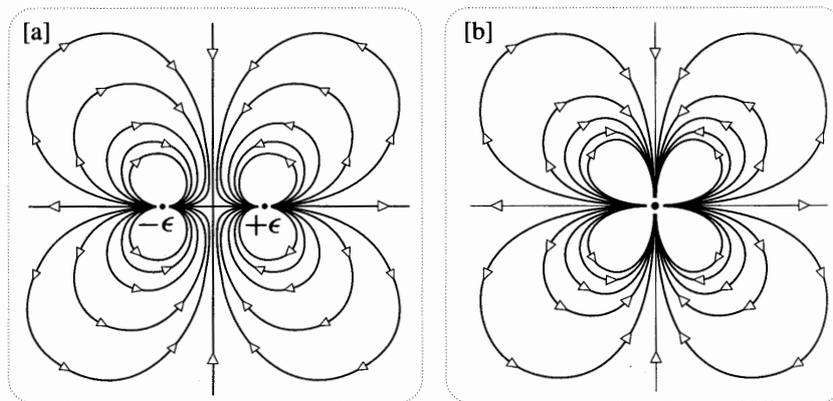
che tende a zero quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Il campo di dipolo corrisponde a tenere costante  $q(2\epsilon)$  e quindi ad aumentare  $q$  quando la distanza di separazione  $2\epsilon$  diminuisce).

Nel limite si ottiene

$$D = \frac{|d|e^{-i\phi}}{\bar{z}^2} = \frac{d}{\bar{z}^2}, \quad \text{dove } d = |d|e^{-i\phi}$$

Il numero complesso  $d$  è il *momento di dipolo* (un vettore). Il dipolo in figura ha  $\phi = 0$ , cioè, il vettore associato è diretto nel verso positivo dell'asse reale.

Il gioco può continuare: che cosa accade se fondiamo due dipoli opposti, aumentando la loro intensità in modo che i loro campi non si annichilino? La figura mostra la risposta



Ecco l'algebra che la chiarisce:

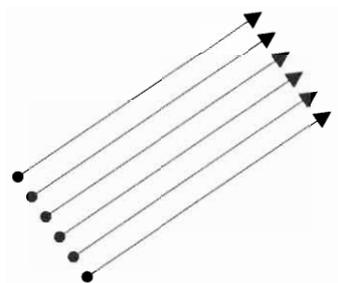
$$Q_\epsilon = d \left[ \frac{1}{(\bar{z} - \epsilon)^2} - \frac{1}{(\bar{z} + \epsilon)^2} \right] = 4d\epsilon \frac{\bar{z}}{(\bar{z}^2 - \epsilon^2)^2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} Q = \frac{p}{\bar{z}^3}, \quad p = 4d\epsilon$$

Questo è un campo di quadrupolo con momento di quadrupolo  $p$ . Risulta così spiegato l'annullarsi di flusso e circolazione di  $(1/\bar{z}^3)$ : è il campo di due dipoli infinitamente vicini ciascuno dei quali produce zero flusso e zero circolazione, e lo stesso farà il campo di quadrupolo. Il gioco può ancora continuare: fondendo due quadrupoli si ottiene l'ottupolo  $(1/\bar{z}^4)$  e così via.

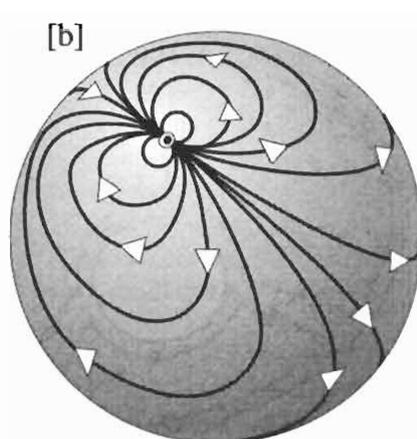
Dipoli, quadrupoli, ottupoli etc. sono noti come *multipoli* e i loro momenti sono noti come *momenti di multipolo*.

Sebbene il teorema di Cauchy per potenze positive  $n \geq 0$  non sembri misterioso, possiamo continuare il gioco e cercarne il significato fisico. Consideriamo, per  $n = 0$ , il campo coniugato della funzione costante  $f(z) = a$ : un flusso costante di intensità  $|a|$  nella direzione  $\bar{a}$ . Il campo sembra originare oltre l'orizzonte nella

direzione  $-\bar{a}$  e sparire nella direzione opposta,



come se all'infinito ci fossero una sorgente e un pozzo. Per farsi un'idea si proceda ad una proiezione stereografica sulla sfera di Riemann: poiché le linee di flusso sono linee parallele nella direzione  $\bar{a}$ , la loro proiezione sulla sfera di Riemann sono cerchi che passano per il polo Nord nella stessa direzione. Si ottiene così la figura

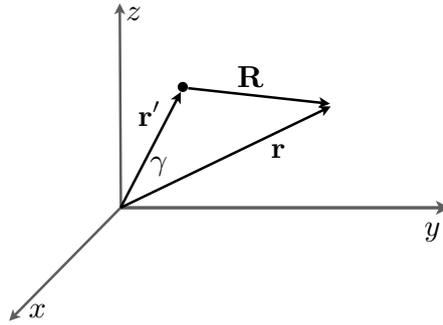


che rappresenta un *dipolo all'infinito*. Si può mostrare che  $f(z) = z$  rappresenta un quadrupolo all'infinito e così via.

10.2.2. **Intermezzo: espansione in multipoli.**<sup>2</sup> Una delle formule più semplici e utili della fisica-matematica fu trovata nel 1782 da Adrien-Marie Legendre e quindi estesa pochi mesi dopo da Pierre-Simon de Laplace. I due fisici-matematici erano interessati a calcolare il potenziale gravitazionale associato ad una distribuzione di masse  $\mu_i$  poste nei punti  $\mathbf{r}'_i$ . Considerarono il potenziale gravitazionale di questa distribuzione

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{\mu_i}{R_i} = \sum_i \frac{\mu_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|}$$

<sup>2</sup>Non è parte del programma d'esame.



e per ciascun singolo termine della somma, Legendre ottenne (per  $r > r'$ ) lo sviluppo in serie

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos \gamma}} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r} \cos \gamma}} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell}} P_{\ell}(\cos \gamma)$$

dove  $P_0 = 1$ ,  $P_1(u) = u$ ,  $P_2(u) = (1/2)(3u^2 - 1)$ , ... sono i *Polinomi di Legendre*. Sulla base della loro definizione, si ottengono calcolando lo sviluppo in serie di Taylor

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z^2 - 2zu}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} z^{\ell} P_{\ell}(u)$$

(per questa ragione, la funzione a primo membro è detta *funzione generatrice* dei polinomi di Legendre). Si osservi che per  $r < r'$ , sarebbe stato conveniente raccogliere  $r'$  a denominatore e ottenere in questo modo una serie di potenze positive in  $r$ .<sup>3</sup> Laplace, sempre nel 1782, fece un passo in più: usando coordinate sferiche, si rese conto che esistevano funzioni,  $Y_{\ell}^m = Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$ ,  $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell$ , con “buone” proprietà rispetto alle rotazioni, in termini delle quali era possibile sviluppare le funzioni di Legendre:

$$P_{\ell}(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (-1)^m Y_{\ell}^{-m}(\theta, \phi) Y_{\ell}^m(\theta', \phi')$$

dove  $(\theta, \phi)$  e  $(\theta', \phi')$  sono le coordinate angolari rispettivamente di  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$ . Le funzioni  $Y_{\ell}^m$  sono dette *funzioni armoniche sferiche* normalizzate. A questo punto, Laplace espresse il potenziale gravitazionale  $\varphi(\mathbf{r})$  come

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{\mu_i}{R_i} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} p_{\ell m} \frac{Y_{\ell}^{-m}}{r^{\ell+1}}$$

dove

$$p_{\ell m} = \sum_i (-1)^m \mu_i Y_{\ell}^m(\theta'_i, \phi'_i) r'^{\ell}$$

<sup>3</sup>Ogni riferimento alla serie di Laurent non è casuale.

sono chiamati *momenti di multipolo* e l'espansione di  $\varphi(\mathbf{r})$  è chiamata *espansione in multipoli*. Naturalmente, la funzione così ottenuta, è *armonica* nello spazio al di fuori della regione occupata dalle masse, dove vale  $\Delta\varphi = 0$ .

Correva l'anno 1782 e già era chiaro che le soluzioni dell'equazione di Laplace si raggruppavano in multiplotti: fissato  $\ell$ , l'insieme delle combinazioni lineari delle  $2\ell + 1$  armoniche sferiche si trasforma in se stesso per rotazioni. Nel linguaggio moderno, le armoniche sferiche di ordine  $\ell$  sono una base per la rappresentazione irriducibile del gruppo delle rotazioni di dimensione  $\ell$ . Questa matematica la si ritrova in elettrostatica e in meccanica quantistica. La incontrerete tra non molto quando studierete l'atomo di idrogeno.

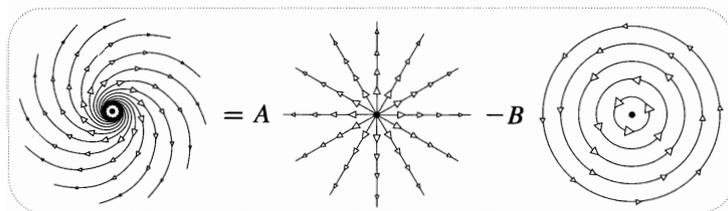
**10.2.3. Serie di Laurent = Espansione in multipoli.** Le idee espone prima dell'intermezzo gettano una nuova luce sulla serie di Laurent e il teorema dei residui. Supponiamo che una funzione  $f(z)$ , altrimenti analitica, abbia un polo triplo nell'origine. Sulla base delle lezioni precedenti sappiamo che

$$f(z) = \frac{p}{z^3} + \frac{d}{z^2} + \frac{q}{z} + a + bz + cz^2 + \dots$$

Nell'intorno della singolarità, il comportamento della funzione è governata dalla sua parte principale, il cui campo coniugato è

$$\bar{\mathbf{P}} \leftrightarrow \frac{\bar{p}}{z^3} + \frac{\bar{d}}{z^2} + \frac{\bar{q}}{z}$$

Riconosciamo la sovrapposizione di un quadrupolo, di un dipolo e di una combinazione sorgente/vortice del tipo già incontrato ( $\bar{q} = A - iB$ ):



La parte principale corrisponde quindi ad una *espansione in multipoli* (si osservi che questa è una espansione del *campo*, mentre nell'intermezzo abbiamo discusso un'espansione del *potenziale* del campo).

La serie di Laurent e il teorema dei residui possono essere interpretati fisicamente come segue. Il solo termine capace di generare flusso e circolazione è  $\bar{q}/z$ , che può essere a sua volta decomposto in un vortice di intensità  $\mathcal{C} = -2\pi\text{Im}(q)$  e una sorgente di intensità  $\mathcal{F} = 2\pi\text{Re}(q)$ . Tutti gli altri termini corrispondono a multipoli che non generano né circolazione né flusso; un insieme finito di questi è nel polo, mentre il resto è all'infinito.

10.2.4. **Antiderivata di una funzione analitica = Potenziale.** Sia  $H(z)$  una funzione analitica in una regione  $\mathcal{R}$ . Nella lezione 5.1 abbiamo visto che esiste una funzione potenziale complessa  $V = V(z)$  tale che

$$\int_A^B H(z)dz = V(B) - V(A)$$

La funzione  $V$  è chiamata *anti-derivata* o *primitiva* in matematica. Il potenziale complesso  $V$  è una funzione analitica e

$$V'(z) = H(z).$$

Separiamo parte reale e parte immaginaria del potenziale complesso,

$$V(z) = \Phi(z) + i\Psi(z),$$

la parte reale  $\Phi(z)$  è chiamato *potenziale* (reale) e la parte complessa  $\Psi$  è detta *funzione di corrente*.

Poiché (a meno di una costante additiva)

$$V(z) = \int_{C_{a \rightarrow z}} H(z)dz,$$

dove  $C_{a \rightarrow z}$  è un qualunque cammino da  $a$  a  $z$  ( $a$  è arbitrario) e

$$\oint_{C_{a \rightarrow z}} H(z)dz = \mathcal{C}(\overline{\mathbf{H}}, C_{a \rightarrow z}) + i\mathcal{F}(\overline{\mathbf{H}}, C_{P \rightarrow z}),$$

avremo

$$\Phi(z) = \mathcal{C}(\overline{\mathbf{H}}, C_{a \rightarrow z}) \quad \text{e} \quad \Psi(z) = \mathcal{F}(\overline{\mathbf{H}}, C_{a \rightarrow z})$$

Incominciamo col comprendere il significato fisico della funzione di corrente  $\Psi$ . Il significato è particolarmente trasparente per i fluidi, per i quali  $\overline{\mathbf{H}}$  rappresenta un campo di velocità. Allora, nelle regioni dove  $H(z)$  è analitica:

*Le linee di flusso sono le curve di livello della funzione di corrente  $\Psi$ .*

Ecco la ragione. Fissiamo  $a$  e consideriamo  $C_{a \rightarrow z}$  per tutti gli  $z$  lungo una linea di flusso che passa per  $a$  (si veda la figura sotto). Allora  $\Psi(z) = 0$ , in quanto  $\overline{\mathbf{H}}$  è parallelo alla curva (e dunque il flusso attraverso la curva è zero). Similmente, supponiamo che  $q$  stia da qualche parte su una linea di flusso che passa per un



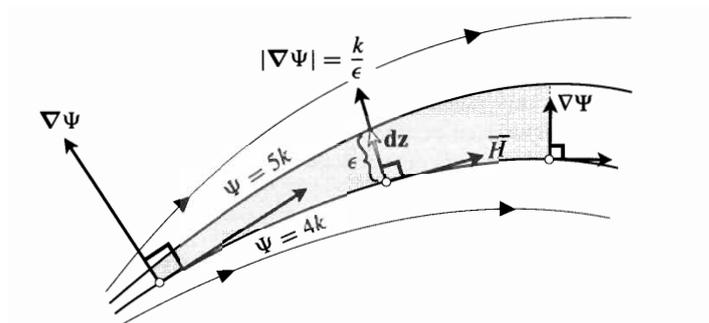
Mostriamo che

$$\bar{H} = -i\nabla\Psi.$$

Infatti, per Cauchy- Riemann si ha

$$\nabla\Psi = \partial_x\Psi + i\partial_y\Psi = \partial_x\Psi + i\partial_x\Phi = i\partial_x(\Phi - i\Psi) = i\partial_x\bar{V} = i(\bar{V})' = i\bar{H},$$

che è quanto si voleva dimostrare. In altre parole, si passa da  $\nabla\Psi$  a  $\bar{H}$  con una rotazione di  $-\pi/2$ , come mostra la figura



Consideriamo adesso il potenziale (reale)  $\Phi$ . Ragionando analogamente a prima si arriva a concludere che  $\bar{H} = \nabla\Phi$  e che

*Le linee equipotenziali sono le traiettorie ortogonali alle linee di flusso.*

Anche  $\Phi$ , come abbiamo già visto, deve essere armonica,

$$\Delta\Phi = 0.$$

Le funzioni  $\Phi$  e  $\Psi$  sono collegate tra loro da Cauchy-Riemann,

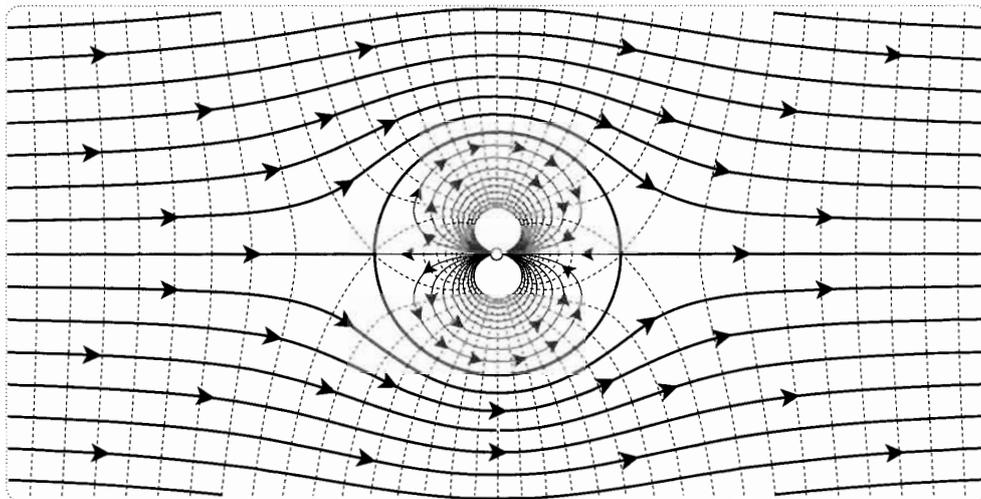
$$-i\nabla\Psi = \nabla\Phi,$$

le loro linee di livello sono ortogonali.

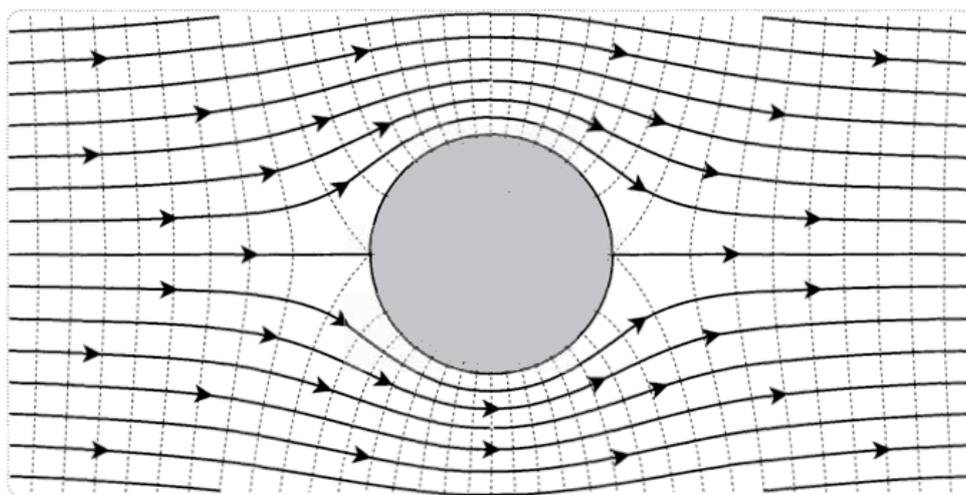
### 10.2.5. *Elettrostatica e fluidi: un esempio.*

$$H = 1 - \frac{1}{z^2} \text{ (campo costante + dipolo)} \Rightarrow V = z + \frac{1}{z}$$

Si ottiene la bella figura (come sempre da Needham) delle linee di flusso e delle linee equipotenziali:



L'applicazione all'elettrostatica è chiara. Ma c'è anche una naturale applicazione ai fluidi. Il cerchio di raggio 1 rappresenta una linea di flusso; dato che non c'è alcun flusso di fluido attraverso una linea di flusso, esso può essere considerato come un ostacolo circolare di raggio 1 posto sul cammino del fluido:



Risulta così determinato il moto di un fluido perfetto bi-dimensionale attorno ad un ostacolo circolare. Il campo di velocità è

$$w = 1 - \frac{1}{z^2} = V', \quad \text{dove} \quad V = z + \frac{1}{z} \quad |z| > 1$$

10.2.6. **Flusso termico stazionario.** Riprendiamo il discorso sull'equazione del calore che abbiamo incominciato in una lezione precedente. Consideriamo un solido

con una distribuzione di temperatura nel regime stazionario. Ricordiamo che

$$\mathbf{J} = -k\nabla T$$

è il flusso termico, dove  $T$  è la temperatura e  $K$ , assunta costante, è la conducibilità termica. In condizioni stazionarie  $T$  è armonica, cioè soddisfa l'equazione di Laplace

$$\Delta T = 0.$$

Restringiamoci a due dimensioni e introduciamo la funzione analitica temperatura complessa

$$T_C = T + i\Psi$$

Questa funzione è il potenziale della funzione complessa

$$H(z) = -\frac{1}{k}(J_x - iJ_y) = \partial_x T - i\partial_y T$$

associata a  $\mathbf{J}$ . Abbiamo cioè

$$H'(z) = T_C.$$

Infatti

$$H'(z) = T'_C(z) = \partial_x T + i\partial_x \Psi = \partial_x T - i\partial_y T$$

(avendo usato Cauchy Riemann). Poco cambia rispetto a quanto già visto:  $T$  è analogo a  $\Phi$ , il potenziale, le cui linee di livello rappresentano le isoterme;  $\Psi$  è la corrente termica. Come prima, si ha

$$\nabla T = \partial_x T + i\partial_y T = \bar{H} = -\frac{1}{k}\mathbf{J}$$

e

$$-i\nabla\Psi = \nabla\Phi,$$

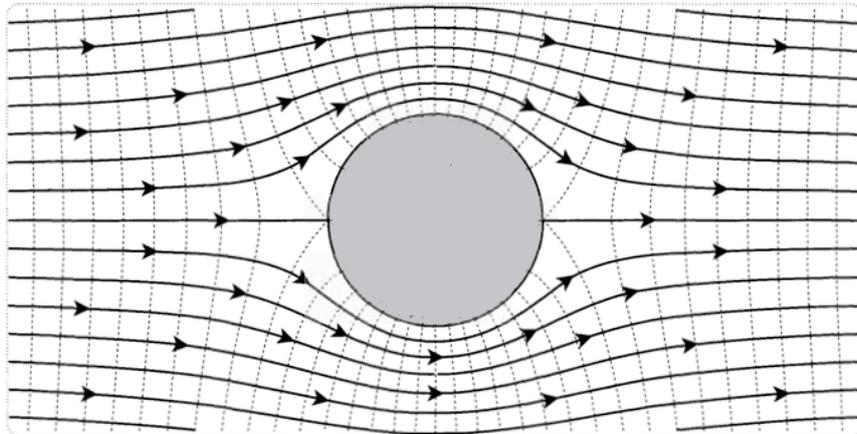
che esprime l'ortogonalità tra le isoterme e le linee di corrente termica.

**N.B.** A volte nel seguito, per brevità, diremo semplicemente temperatura la temperatura complessa e scriveremo  $T$  invece di  $T_C$ , sottintendendo che la sua parte reale è la temperatura usuale.

10.2.7. *Applicazioni ai fluidi.* Riprendiamo il discorso della lezione 9.2.5. Il potenziale

$$w = 1 - \frac{1}{z^2} = V', \quad \text{dove} \quad V = z + \frac{1}{z} \quad |z| > 1$$

descrive il flusso di un fluido in presenza di un ostacolo circolare di raggio 1 posto sul cammino del fluido. Le linee di corrente sono:



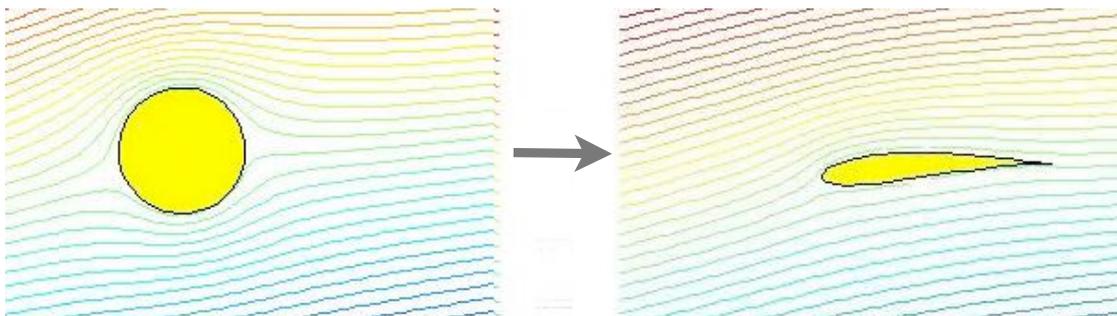
Applicando una trasformazione conforme a  $w$  si può trovare il movimento del fluido attorno a profili più complicati. In particolare, procedendo prima con una trasformazione conforme (affine)

$$\xi = \alpha w + \beta$$

si trasforma il disco unitario nel disco  $|\xi - \beta| = \alpha$ . Una successiva trasformazione, detta di Joukowski,

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right)$$

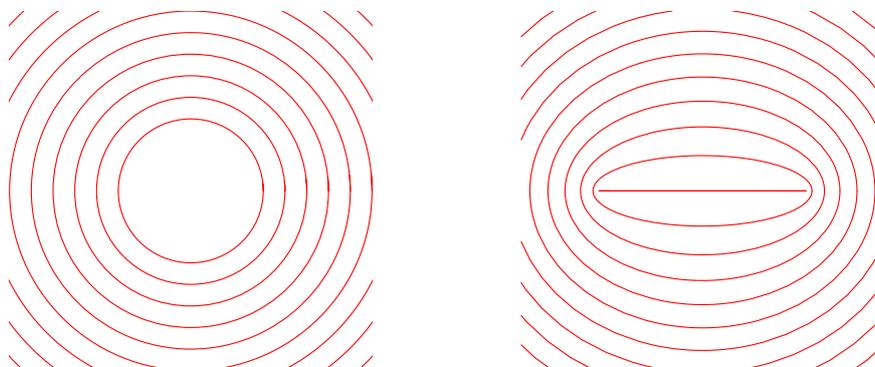
trasforma il cerchio in un profilo che assomiglia alla sezione trasversale dell'ala di un aeroplano.



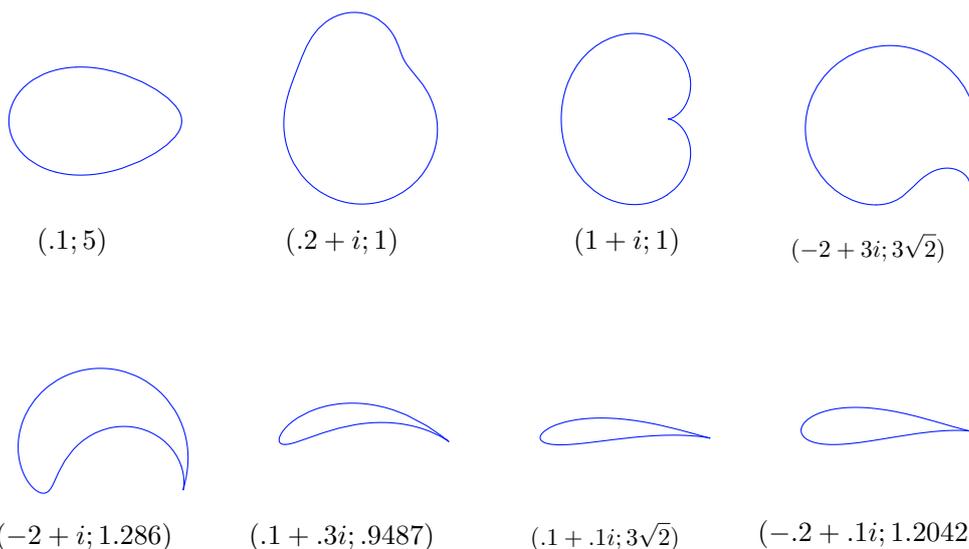
Più precisamente, la mappa di Joukowski

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

trasforma cerchi centrati nell'origine nel piano  $z$  in ellissi con fuochi nell'asse reale del piano- $\zeta$ .



L'effetto "profilo dell'ala di un aereo" si ottiene applicando la mappa di Joukowski a cerchi non centrati nell'origine. E l'effetto è davvero sorprendente. Ecco alcuni esempi, dove il primo numero rappresenta la posizione del centro del cerchio nel piano- $z$  e il secondo il raggio:



Sfortunatamente, flussi derivati da un potenziale non producono spinta verso l'alto e un aereo con tale profilo del fluido attorno all'ala non volerebbe. Per farlo volare, occorre un flusso con circolazione non nulla. I metodi dell'analisi complessa permettono di ottenere questo, utilizzando il ramo di una multifunzione, ad esempio il ramo principale del logaritmo. Di solito, a partire dagli studi di Martin Kutta del 1902, si considera la seguente famiglia di potenziali complessi di velocità

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) + i\gamma \log z$$

con circolazione  $\oint \zeta(z)dz = -2\pi\gamma$ . Una circolazione negativa produce una spinta verso l'alto e, con qualche altra considerazione che qui tralasciamo, si ottengono profili di questo tipo:

