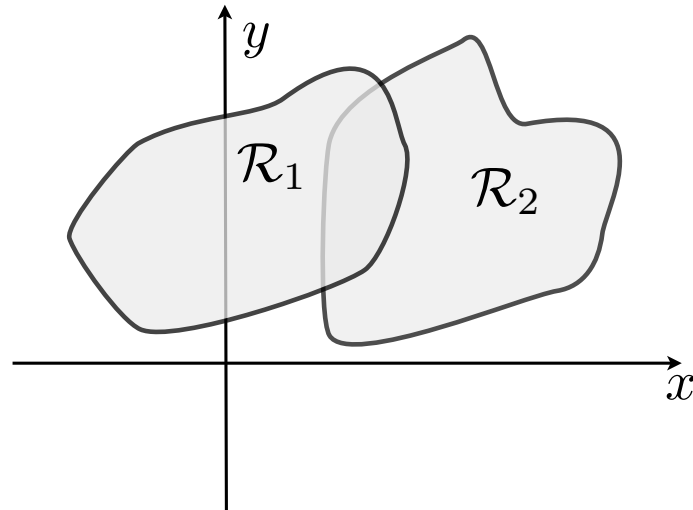
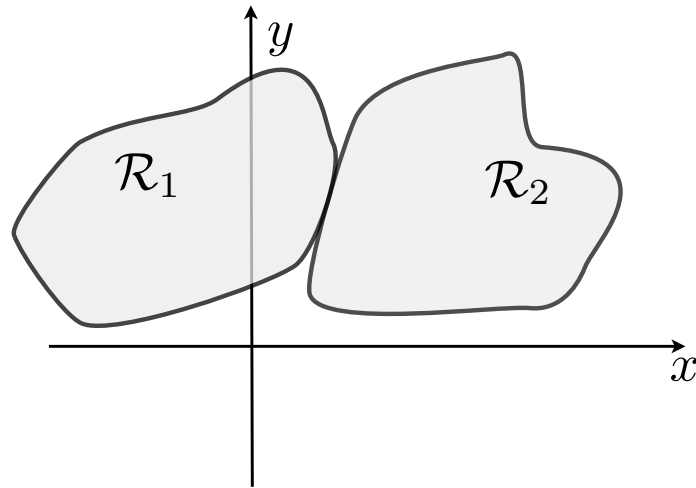


11.2. La rigidità delle funzioni analitiche.

11.2.1. **Prolungamento analitico.** Sia $F_1(z)$ una funzione che è analitica in una regione \mathcal{R}_1 e supponiamo di trovare una funzione $F_2(z)$ che è analitica in una regione \mathcal{R}_2 e che è tale che $F_1(z) = F_2(z)$ in $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$.

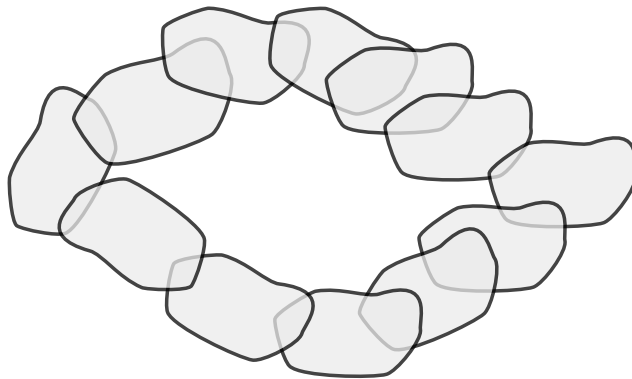


Si dice allora che $F_2(z)$ è una *continuazione analitica* di $F_1(z)$. Perché ci sia continuazione analitica è sufficiente che le due regioni abbiano in comune soltanto un piccolo arco.



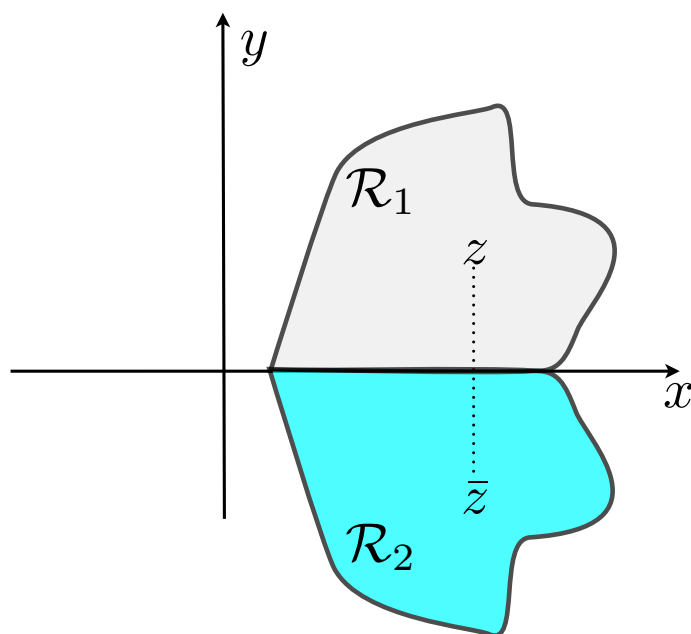
Mediante continuazione analitica a regioni $\mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4, \dots$, possiamo estendere la regione iniziale ad altre parti del piano complesso. Le funzioni $F_1(z), F_2(z), F_3(z), \dots$ sono talvolta chiamate *elementi* della funzione. Talvolta è impossibile estendere una funzione analiticamente oltre la frontiera di una regione; in questo caso, la frontiera è una *frontiera naturale*.

Il *teorema di unicità* stabilisce che la continuazione analitica è unica, a meno che nel processo di estensione non si incontrino punti di diramazione.



Un importante strumento di estensione analitica è *il principio di Schwartz*. Si tratta di un teorema che stabilisce se una funzione $F_1(z)$ è analitica in una regione \mathcal{R}_1 del semipiano superiore Π^+ , avente come bordo l'asse reale, e ha un valore reale sull'asse reale, allora può essere estesa alla regione \mathcal{R}_2 , ottenuta da \mathcal{R}_1 per riflessione sull'asse reale, nel seguente modo

$$F_2(z) = \overline{F_1(\bar{z})}$$



11.2.2. *Relazioni al bordo tra parti reali e immaginarie di funzioni analitiche.*

La discussione del prolungamento analitico ha indicato come sia possibile correlare univocamente gli elementi che compongono una funzione analitica. A causa della particolare natura di una funzioni analitica, *la sua "rigidità"*, il comportamento delle sue parti nelle differenti regioni del piano complesso è fortemente correlato. Inoltre, c'è una connessione molto forte tra parti reali e parti immaginarie. Ci riferiamo non solo alle equazioni di Cauchy-Riemann, che abbiamo studiato nelle prime lezioni, ma ad una connessione più generale che intendiamo discutere adesso. Come vedremo, se è fornita *abbastanza* informazione sulla parte reale, la parte immaginaria risulta determinata.

Saremo interessati in questa interconnessione a causa del suo grande interesse fisico. Nel caso elettrostatico, per esempio, fornisce una connessione tra il potenziale elettrostatico e la carica totale. Nella teoria dei sistemi vibranti, fornisce una relazione tra le parti reali e immaginarie dell'impedenza, cioè una relazione tra le parti resistive e quelle reattive del sistema. In quest'ultimo caso, la variabile complessa è la frequenza complessa.

Siamo stati in grado di ottenere una buona comprensione delle funzioni analitiche in termini del teorema di Cauchy e della formula di Cauchy (buona parte del corso ha riguardato le loro conseguenze). La rappresentazione integrale fornita dalla formula di Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(Z)}{Z - z} dZ$$

è valida in qualunque dominio con frontiera C (curva semplice chiusa) e collega i valori della funzione f dentro C con i valori che assume su C .

Adesso, vogliamo comprendere se esiste una relazione tra $\text{Re}(f(z))$, la parte reale di f dentro la regione e $\text{Re}(f(Z))$, la parte reale di f sul bordo C della regione, e se esistono relazioni tra le parti immaginarie e reali. Sfortunatamente, non possiamo semplicemente prendere la parte reale di ambo i membri della formula di Cauchy perché la funzione $f(Z)$ e il *nucleo integrale di Cauchy* $1/(Z - z)$ sono entrambi a valori complessi.

In verità, conosciamo già un caso particolare della relazione che cerchiamo per il cerchio di raggio R avente z come centro. In questo caso, poiché il teorema della media di Gauss afferma che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Z) dt, \quad Z = z + Re^{it},$$

possiamo prendere parte reale e immaginaria di ambo i membri dell'equazione e ottenere così relazioni tra parti reali e immaginarie sul cerchio e parti parti reali e

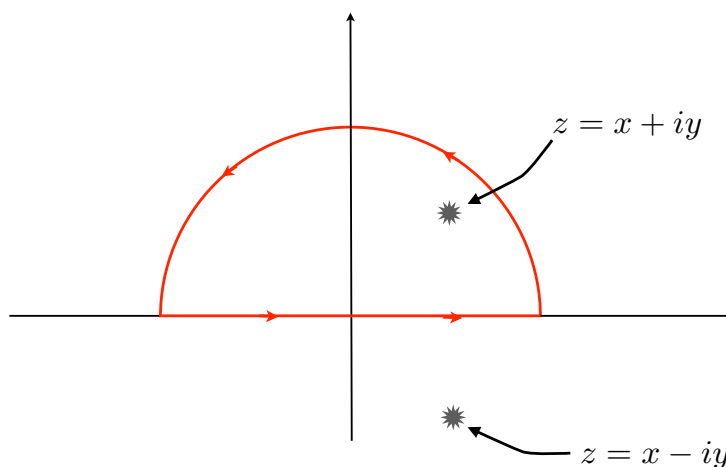
immaginarie al centro del cerchio: se $f = u + iv$, allora

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Z) dt, \quad v(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(Z) dt, \quad Z = z + Re^{it},$$

Cerchiamo una relazione più generale, per C arbitraria e z punto arbitrario dentro C e, nel cercare questo assumeremo che valgano le stesse condizioni del teorema della media di Gauss: $f(z)$ è analitica dentro e lungo C . Affrontiamo il problema incominciando con un cerchio degenere: il semipiano superiore Π^+ , il cui bordo è l'asse reale. In questo caso, il problema diventa il seguente:

Trovare le parti reale e immaginaria di $f = u + iv$ nel semipiano superiore Π^+ in funzione di u e v sull'asse reale.

L'analogo elettrostatico suggerisce una soluzione, poiché il problema in questo caso è quello di trovare il potenziale nel semipiano superiore, quando è noto il potenziale sulla linea $y = 0$. Il *metodo delle immagini* è l'artificio usato in elettrostatica per risolvere problemi di questo tipo. Possiamo pensare che il fattore $1/(Z - z)$ nell'integrale di Cauchy rappresenti una "carica" nel punto $z = x + iy$. Introducendo una carica immagine negativa in $\bar{z} = x - iy$ forziamo le desiderate condizioni al contorno sull'asse reale.



L'integrale sul contorno è $2\pi i f(z)$. L'integrale di $f(Z)/(Z - \bar{z})$ è zero perchè la carica immagine è al di fuori del contorno. Conseguentemente

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(Z) \left[\frac{1}{Z - z} - \frac{1}{Z - \bar{z}} \right] dZ$$

Se $f(z)$ è analitica nell'intero semipiano superiore Π^+ (incluso l'infinito), l'integrale lungo il semicerchio è zero, e l'integrale (1) diventa semplicemente un integrale

lungo l'asse reale

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(X) \left[\frac{(X-x+iy) - (X-x-iy)}{(X-x)^2 + y^2} \right] dX = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(X)}{(X-x)^2 + y^2} dX,$$

Poiché entrambi i lati di (2) contengono solo coefficienti reali, questa equazione vale separatamente per u e v , le parti reale e immaginaria di f ,

$$(3) \quad u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(X, 0)}{(X-x)^2 + y^2} dX$$

$$(4) \quad v(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(X, 0)}{(X-x)^2 + y^2} dX$$

Perciò, l'integrale (3) dà il potenziale u dappertutto sul semipiano superiore in funzione del potenziale su $y = 0$, cioè sull'asse reale — naturalmente, a patto che $f(z)$ sia analitica nel semipiano superiore Π^+ .

Per ottenere una relazione tra u e v la precedente derivazione suggerisce di sommare i contributi delle cariche anziché farne la differenza come in (1). Procedendo allo stesso modo, ma sommando adesso $\frac{1}{z-z}$ e $\frac{1}{z-\bar{z}}$ in (1) si ottiene

$$(5) \quad f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X-x}{(X-x)^2 + y^2} f(X) dX.$$

Uguagliando parti reali e immaginarie, otteniamo le relazioni desiderate

$$(6) \quad u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X-x)v(X, 0)}{(X-x)^2 + y^2} dX$$

$$(7) \quad v(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X-x)u(X, 0)}{(X-x)^2 + y^2} dX$$

La conoscenza del comportamento della parte reale (o immaginaria) di f sull'asse x permette il calcolo sia di u sia di v nel semipiano superiore usando (3) e (7). Queste equazioni rappresentano le soluzioni dei problemi elettrostatici in cui sono date la distribuzioni di carica o di potenziale e si richiede di determinare il campo (per davvero dimostrare questo occorre un ulteriore passo matematico di cui ci occuperemo nella prossima lezione).

Le equazioni precedenti possono essere usate per determinare il comportamento di u e v sul contorno stesso, cioè per $y = 0$. Ricordando la formula di Cauchy per punti su C , cioè l'equazione (★★) della lezione 11.1.1, si ottiene

$$(8) \quad u(x, 0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(X, 0)}{X-x} dX$$

$$(9) \quad v(x, 0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(X, 0)}{X-x} dX$$

Queste relazioni compaiono nella teorie delle trasformate di Hilbert e in fisica sono note come *relazioni di dispersione di Kramers-Kronig*.

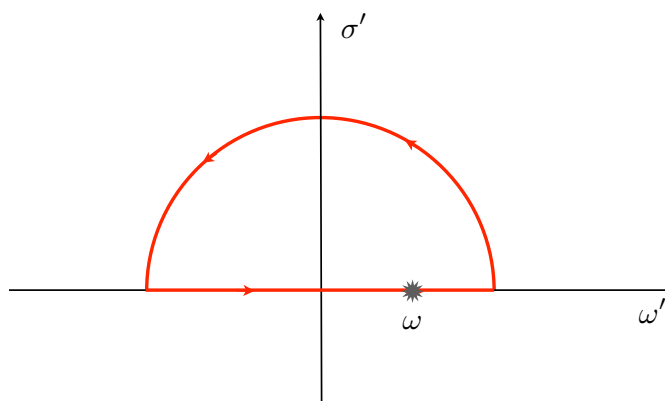
11.2.3. *Relazioni di dispersione di Kramers e Kronig.*

Vista la grande importanza in fisica delle relazioni di dispersione di Kramers-Kronig, la riproponiamo in maniera indipendente da quanto visto finora, con le notazioni e terminologia della fisica. In particolare, sia $z = \omega + i\sigma$ la frequenza complessa, con parte reale ω e parte immaginaria σ .

Ridotte all'osso, le relazioni di dispersione di Kramers-Kronig non sono altro che la formula di Cauchy per punti su C , cioè l'equazione (***) della lezione 11.1.1, quando *la funzione integranda*

$$\chi(z) = \chi'(z) + i\chi''(z)$$

è analitica nel semipiano superiore Π^+ e si considera il cammino



dove ω è sull'asse reale.

Allora

$$(10) \quad \chi(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

(si osservi che ω e ω' sono reali). Separando parte reale e parte immaginaria di $\chi = \chi' + i\chi''$,

$$(11) \quad \chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$(12) \quad \chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

Per apprezzare l'importanza in fisica delle relazioni di dispersione, occorre rispondere alle domande seguenti:

- (1) Quali grandezze fisiche soddisfano le relazioni di dispersione?
- (2) Perché tali grandezze soddisfano le relazioni di dispersione?
- (3) Qual è il significato fisico delle relazioni di dispersione?

Ecco le risposte:

- (1) Tipicamente, la grandezza fisica $\chi(z) = \chi'(z) + i\chi''(z)$ è la continuazione analitica della trasformata di Fourier di una funzione che rappresenta come una certa proprietà P di un sistema fisico risponde, nel corso del tempo, ad una “forza” (intesa in senso generalizzato) applicata F (ad esempio, P potrebbe essere l’angolo di un pendolo e F la forza del motore che guida il pendolo). Se l’intensità della forza è piccola, la risposta è lineare

$$P(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t-u)F(u)du \quad \longleftrightarrow \quad P(z) = \chi(z)F(z).$$

χ è nota come *suscettività* o *impedenza*, a seconda del caso.

- (2) Perché $\chi(t-u)$, per ragioni fisiche deve essere zero per $t < u$. La risposta del sistema al tempo t deve essere successiva alla forza applicata al tempo u (per $t < u$ la risposta del sistema è zero, perché la forza non è stata ancora applicata). È un teorema dell’analisi di Fourier (vedi lezione 21) che la trasformata di Fourier di una funzione $f(t)$ nulla per $t < 0$ è analitica nel semipiano superiore Π^+ . Quindi, la sola ipotesi su cui si basano le relazioni di dispersione — che la funzione sia analitica nel semipiano superiore — è soddisfatta. Quindi per $\chi(z) = \chi'(z) + i\chi''(z)$ valgono le relazioni di dispersione quando z tende all’asse reale, cioè $z = \omega$ (e $\sigma = 0$).
- (3) La parte immaginaria delle funzione di risposta $\chi(\omega)$ descrive come il sistema dissipa energia, essendo sfasato con la forza motrice. Le relazioni di Kramers-Kronig implicano che la risposta dissipativa (resistenza, per i circuiti elettrici) è sufficiente a determinare la sua risposta in fase reattiva (reattanza, per i circuiti elettrici).

Chiarito questo, occorre dire che le formule (11) e (12) non sono utili per ricostruire la risposta fisica perché gli integrali vanno da $-\infty$ a $+\infty$, il che implica una conoscenza della risposta per frequenze negative. Tuttavia questo problema è facilmente aggirato: $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$ è la trasformata di Fourier di una funzione reale, quindi $\chi(-\omega) = \overline{\chi(\omega)}$ (vedere lezione 18.2.2.). Questo significa che $\chi'(\omega)$ è una funzione pari e $\chi''(\omega)$ è una funzione dispari. Usando questo fatto, il dominio di integrazione può essere portato da $(-\infty, +\infty)$ a $[0, +\infty)$ nel modo seguente: si moltiplichino numeratore e denominatore della funzione integranda a secondo membro della (11) per $(\omega + \omega')$ e si separino i contributi,

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi}P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + \frac{\omega}{\pi}P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Poiché $\chi''(\omega)$ è dispari, il secondo integrale si annulla e rimaniamo con

$$(13) \quad \chi'(\omega) = \frac{2}{\pi}P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Lo stesso argomento per la parte immaginaria fornisce

$$(14) \quad \chi''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Le equazioni (13) e (14) sono in effetti le relazioni derivate originariamente da Kramers e Kronig.