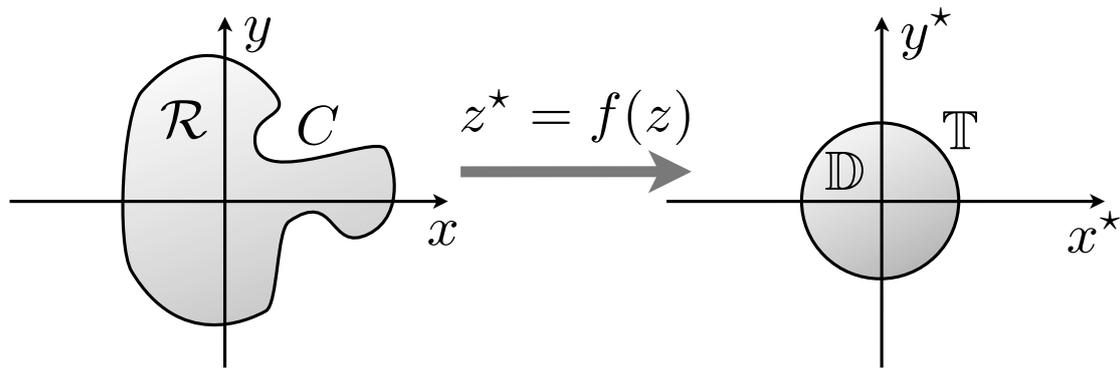


12.1. Teoremi fondamentali sulle trasformazioni conformi.

12.1.1. Teorema di Riemann sulle rappresentazioni.

Teorema (di Riemann sulle rappresentazioni). *Sia C una linea chiusa semplice del piano z che costituisce la frontiera di una regione \mathcal{R} . Sia \mathbb{T} il cerchio di raggio unitario e centro nell'origine che costituisce la frontiera del disco unitario \mathbb{D} nel piano z^* .*



Allora esiste una funzione $z^* = f(z)$ analitica in \mathcal{R} , che rappresenta ogni punto di \mathcal{R} su un punto corrispondente di \mathbb{D} e ogni punto di C su un punto corrispondente di \mathbb{T} , in una corrispondenza biunivoca.

È un teorema che ispira rispetto e ammirazione per la sua estrema generalità. La sua dimostrazione esula dai limiti di questo corso.

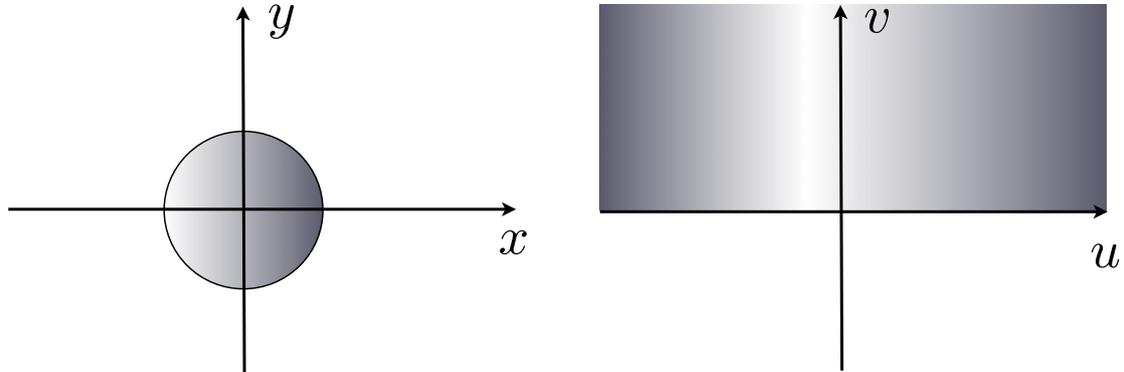
12.1.2. **Punti fissi o invarianti di una trasformazione.** Si supponga di far coincidere il piano z^* con il piano z in modo che gli assi delle coordinate coincidano e che formino quindi sostanzialmente un solo piano. Si può allora pensare alla trasformazione $z^* = f(z)$ come ad una rappresentazione di certi punti del piano in altri punti. I punti per i quali $z = f(z)$ resteranno fermi: per questa ragione si dice che sono i *punti fissi* o *invarianti* della trasformazione. Se f è complicata è difficile determinare se f ha punti fissi e quali sono. Grazie a Brouwer, sappiamo che ce ne sarà sempre almeno uno.

Teorema (di Brouwer del punto fisso). *Ogni trasformazione continua del disco unitario \mathbb{D} in sé stesso ha almeno un punto fisso.*

Vale lo stesso discorso fatto a commento del teorema di Riemann.

12.1.3. Esempi di trasformazioni conformi.

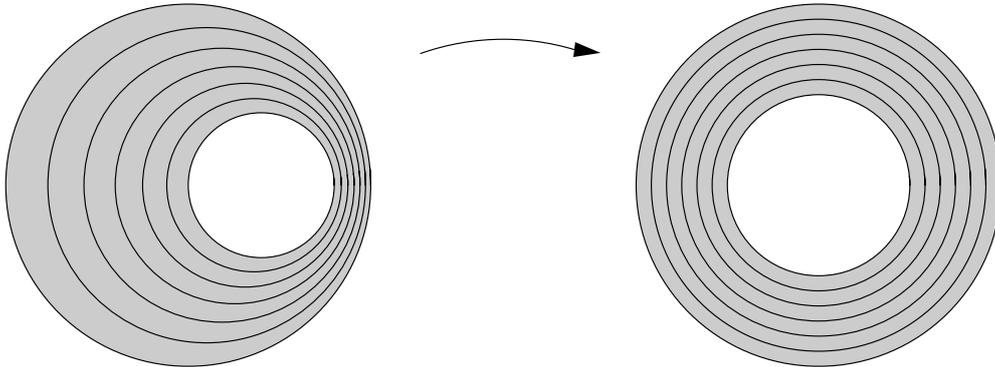
- *Rappresentazione di un cerchio in un semipiano.*



$$z^* = i \left(\frac{1-z}{1+z} \right) \quad z = \frac{i-z^*}{i+z^*}$$

Si osservi che si tratta di una trasformazione di Möbius. Si vede che il centro del cerchio $z = 0$ finisce in $z^* = i$ e che $z = -1$ corrisponde a $z^* = \infty$, mentre $+1$ finisce nello zero. Il semicerchio inferiore finisce nell'asse reale negativo e quello superiore in quello positivo.

- *Swap tra un punto qualunque in un cerchio e centro del cerchio.*



$$z^* = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}, \quad |a| < 1$$

Anche questa è una trasformazione di Möbius, denotiamola $M_a(z)$. La matrice associata è

$$[M_a] = \begin{bmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & -1 \end{bmatrix}$$

Poiché il determinante $-1 - |a|^2 \neq 0$, la trasformazione è invertibile. Lo swap si vede immediatamente:

$$M_a(0) = a \quad \text{e} \quad M_a(a) = 0$$

Inoltre, si verifica facilmente che questa trasformazione rappresenta il disco unitario \mathbb{D} in sè stesso: notiamo che

$$\begin{aligned} |z - a|^2 &= |z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2 \\ |\bar{a}z - 1|^2 &= |a|^2|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + 1 \end{aligned}$$

sottraendo membro a membro

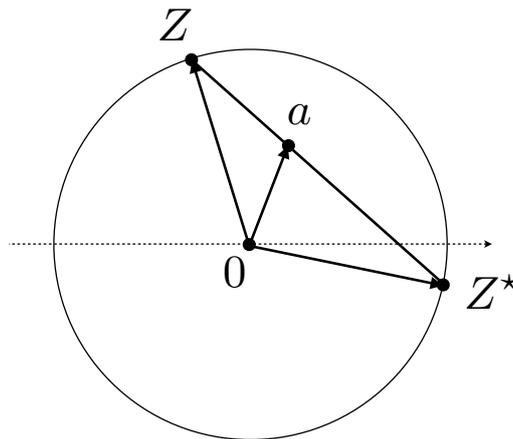
$$|z - a|^2 - |\bar{a}z - 1|^2 = (1 - |a|^2)(|z|^2 - 1) < 0 \quad \text{quando} \quad |z| < 1, |a| < 1.$$

Quindi $|z - a| < |\bar{a}z - 1|$, da cui

$$|z^*| = \frac{|z - a|}{|\bar{a}z - 1|} < 1 \quad \text{quando} \quad |z| < 1, |a| < 1.$$

e quindi z^* sta dentro il disco unitario \mathbb{D} .

Esercizio 1. *Mostrare che un punto Z sulla circonferenza \mathbb{T} di raggio 1 si trasforma nel punto Z^* , estremo delle corda che passa per Z e per a , secondo la costruzione geometrica mostrata in figura*



Risolviamo l'esercizio con i metodi della geometria analitica. Dobbiamo trovare l'intersezione tra la retta che passa per i punti Z e a e il cerchio di raggio 1. L'equazione della retta è

$$(\bar{Z} - \bar{a})z - (Z - a)\bar{z} - (a\bar{Z} - \bar{a}Z) = 0$$

e naturalmente l'equazione del cerchio è $\bar{z}z = 1$. Moltiplichiamo l'equazione della retta per z , teniamo conto dell'equazione del cerchio, e riconduciamo l'equazione algebrica di secondo grado così ottenuta alla forma standard con coefficiente quadratico uguale a 1. Otteniamo

$$z^2 - \frac{a\bar{Z} - \bar{a}Z}{\bar{Z} - \bar{a}}z - (Z - a) = 0$$

Sappiamo che Z è soluzione, possiamo dunque abbassare di grado l'equazione ricordando che la somma delle radici è pari al coefficiente lineare cambiato di segno; chiamiamo Z^* la radice che cerchiamo. Allora

$$Z + Z^* = \frac{a\bar{Z} - \bar{a}Z}{\bar{Z} - \bar{a}},$$

da cui

$$Z^* = \frac{a\bar{Z} - \bar{a}Z}{\bar{Z} - \bar{a}} - Z = \frac{a\bar{Z} - \bar{a}Z - 1 + \bar{a}Z}{\bar{Z} - \bar{a}} = \frac{a\bar{Z} - 1}{\bar{Z} - \bar{a}} = \frac{(-Z)(a\bar{Z} - 1)}{(-Z)(\bar{Z} - \bar{a})} = \frac{Z - a}{\bar{a}Z - 1},$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Esercizio 2. Calcolare lo Jacobiano della trasformazione sulla circonferenza \mathbb{T} di raggio 1.

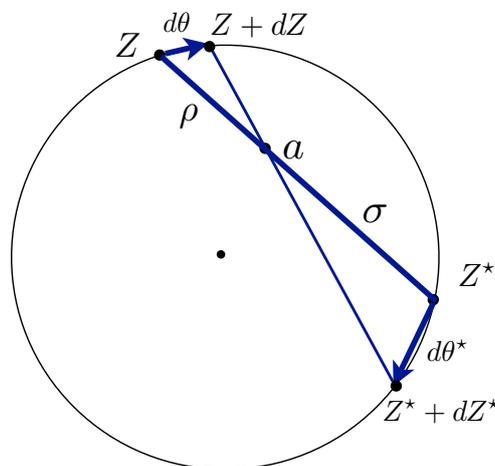
È richiesto il calcolo di

$$\frac{d\theta^*}{d\theta}$$

dove $dZ = iZd\theta$ e $dZ^* = iZ^*d\theta^*$. Quindi

$$\frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{Z}{Z^*} \frac{dZ^*}{dZ}$$

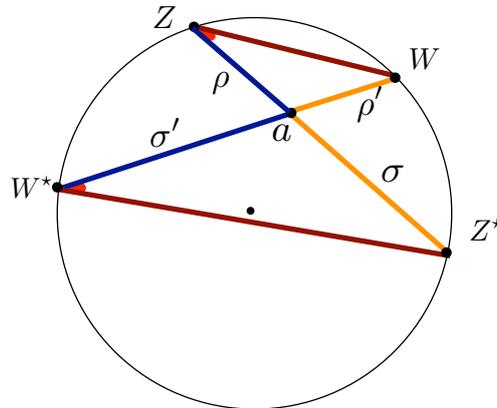
Si lascia come esercizio a casa il calcolo algebrico. Qui si fornisce un calcolo geometrico. Si consideri la figura



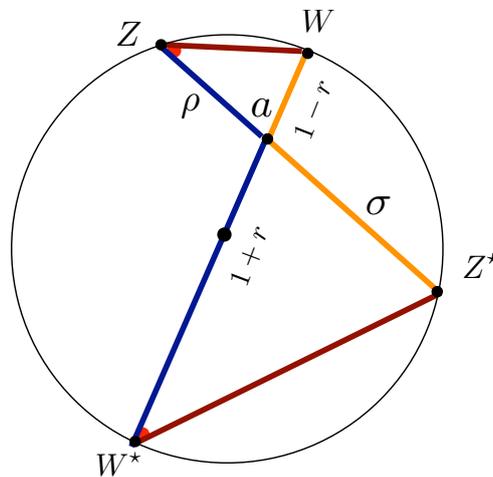
Lo Jacobiano è il rapporto tra le lunghezze d'arco infinitesime $d\theta^*$ e $d\theta$. Poiché i triangoli in figura (in blu) sono simili $d\theta^* : \sigma = d\theta : \rho$. Quindi

$$\frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{\sigma}{\rho}$$

Per determinare σ/ρ osserviamo che i triangoli finiti mostrati in figura sono simili



Allora $\rho : \sigma' = \rho' : \sigma$. Ne segue che $\rho\sigma = \rho'\sigma' = \text{costante}$. Per determinare la costante scegliamo W in modo che il segmento WW^* sia un diametro:



Posto $a = re^{i\alpha}$, si ottiene $\rho\sigma = (1+r)(1-r) = 1-r^2$. Quindi

$$\left| \frac{d\theta^*}{d\theta} \right| = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{\sigma\rho}{\rho^2} = \frac{1-r^2}{\rho^2}$$

Ma $\rho^2 = |Z - a|^2$, per cui il risultato finale è

$$\left| \frac{d\theta^*}{d\theta} \right| = \frac{1-r^2}{|Z-a|^2}$$

Questa funzione svolge un ruolo cruciale nella soluzione del problema di Dirichlet nel piano e nella teoria delle serie di Fourier.