

## 12.2. Proprietà generali delle funzioni armoniche.

### 12.2.1. *Equazione di Laplace.*

L'equazione di Laplace nello spazio euclideo  $n$ -dimensionale

$$\Delta u = 0,$$

dove

$$\Delta = \nabla \bullet \nabla = \nabla^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (\text{in coordinate cartesiane})$$

si presenta in questioni di svariata natura. Particolarmente rilevanti per la fisica sono i casi  $n = 2$  e  $n = 3$ . Avendo discusso a lezione alcuni aspetti del caso  $n = 2$ , forniamo qui un trattamento un po' più generale per  $n = 3$ , cioè per l'equazione di Laplace nello spazio fisico tri-dimensionale. Ogni sua soluzione *regolare* (cioè finita e continua con le sue derivate prime e che ha derivate seconde) in una regione  $\mathcal{R}$  si chiama *funzione armonica* in  $\mathcal{R}$ .

### 12.2.2. *Teorema della media.*

Una sua prima ed importante proprietà è la seguente: *la media,  $\bar{u}_S$ , dei valori che una funzione armonica  $u$  in  $\mathcal{R}$  assume su di una sfera qualsiasi interna a  $\mathcal{R}$ , è uguale al valore che  $u$  assume al centro di tale sfera.* Vale a dire, se  $P$ ,  $r$  e  $S$  sono rispettivamente centro, raggio e superficie della sfera considerata e  $u(P)$  è il valore di  $u$  al centro di  $P$ , e se si pone

$$(1) \quad \bar{u}_S = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S u \, dS,$$

il teorema (della media di Gauss) afferma che  $\bar{u}_S$  è indipendente da  $r$  e precisamente si ha

$$u(P) = \bar{u}_S$$

Per dimostrarlo, assumiamo coordinate sferiche  $r, \theta, \phi$  (con l'usuale convenzione della fisica che  $\theta$  è la co-latitudine e  $\phi$  la longitudine). Allora

$$dS = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

da cui

$$\bar{u}_S = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} u(r, \theta, \phi) \sin \theta \, d\theta$$

Questa quantità, fissato il punto  $P$ , risulterà funzione, al più, di  $r$ . Studiamo come varia questa funzione nella direzione radiale  $\mathbf{n}$ , il versore normale alla sfera, cioè studiamo la derivata direzionale  $\nabla_{\mathbf{n}}$  di  $\bar{u}_S$ ,

$$\nabla_{\mathbf{n}} \bar{u}_S \equiv \mathbf{n} \bullet \nabla \bar{u}_S = \int_S \nabla u \bullet \mathbf{n} \, dS$$

Detta  $V$  la sfera piena,  $\partial V = S$ , usando il teorema della divergenza otteniamo

$$\int_S \nabla u \bullet \mathbf{n} \, dS = \int_V \nabla \bullet \nabla u \, dV = \int_V \Delta u \, dV = 0$$

perché  $V$  è armonica in  $P$ . Allora  $\bar{u}_S$  è una costante che non dipende dal raggio. Per determinare la costante, passiamo al limite  $r \rightarrow 0$  nella (1) ottenendo così

$$\bar{u}_S = u(P),$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Un corollario notevole è che:  $u(P)$  è pure la media dei valori che  $u$  assume nei punti interni della sfera  $S$ . Basta infatti supporre di calcolare tale media servendosi di strati sferici di spessore infinitesimo e concentrici alla sfera  $S$ .

### 12.2.3. Teoremi del valore massimo e minimo.

Un altro corollario molto importante (che estende quanto visto a lezione per le funzioni analitiche) è che: *una funzione armonica  $u$  in una regione  $\mathcal{R}$ , non può avere dentro  $\mathcal{R}$  punti di massimo e di minimo.* Infatti, se nel punto  $P$  interno a  $\mathcal{R}$  vi fosse, per esempio, un massimo, esisterebbe un intorno di  $P$  tale che in tutti i suoi punti sarebbe  $u < u(P)$  e quindi per una sferetta di centro  $P$  interna ad esso si avrebbe  $\bar{u}_S < u(P)$ , contrariamente a quanto è stato appena dimostrato. Il massimo e minimo dei valori di  $u$  dovranno dunque necessariamente trovarsi sul bordo  $\partial\mathcal{R}$ .

Da questo corollario e dalla continuità di  $u$  segue che: *se  $u$  ha un valore costante su tutta una superficie chiusa  $S = \partial\mathcal{R}$ , allora ha quello stesso valore in tutto lo spazio  $\mathcal{R}$  interno ad  $S$ .* In particolare, *se  $u$  è zero sul bordo di  $\mathcal{R}$ , allora è zero in tutto  $\mathcal{R}$ .*

### 12.2.4. Unicità delle soluzioni dell'equazione di Laplace.

Vista la grande importanza di quest'ultimo teorema, ne diamo un'altra dimostrazione che si presta meglio a generalizzazioni. Appliciamo il teorema della divergenza al campo  $\mathbf{F} = u\nabla u$ , ottenendo

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial\mathcal{R}} u \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

e ricordando l'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (u \nabla u) = u \nabla \cdot \nabla u + \nabla u \cdot \nabla u = u \Delta u + (\nabla u)^2$$

e che  $\Delta u = 0$  in  $\mathcal{R}$ , se ne deduce che

$$\int_{\mathcal{R}} (\nabla u)^2 \, dV = \int_{\partial\mathcal{R}} u \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Se, ora,  $u = 0$  su tutto il bordo  $\partial\mathcal{R}$ , il secondo integrale si annullerà e si avrà

$$(2) \quad \int_{\mathcal{R}} (\nabla u)^2 \, dV = 0$$

e quindi, poiché la funzione integranda non può mai essere negativa,

$$\nabla u = 0 \quad \text{ossia} \quad u = \text{cost.} \quad (\text{in } \mathcal{R})$$

Si può ora dimostrare il teorema di unicità: *se di una funzione  $u$ , armonica dentro la regione finita  $\mathcal{R}$ , si assegnano i valori sul contorno  $\partial\mathcal{R}$ , la funzione è univocamente determinata in tutto  $\mathcal{R}$* . Infatti, supponiamo che esistano due funzioni  $u_1$  e  $u_2$ , regolari, armoniche dentro  $\mathcal{R}$  e con lo stesso valore assegnato  $g$  sul bordo,

$$u_1|_{\partial\mathcal{R}} = u_2|_{\partial\mathcal{R}} = g.$$

Allora, poiché  $\Delta u_1 = 0$  e  $\Delta u_2 = 0$ , anche la loro differenza  $\psi = u_1 - u_2$  sarà armonica: sarà  $\Delta\psi = 0$  dentro  $\mathcal{R}$  e  $\psi$  si annullerà sul bordo. Per il teorema precedente  $\psi = 0$ , cioè  $u_1 = u_2$ , la soluzione è unica, che è quanto si voleva dimostrare.

### 12.2.5. *Problemi di Dirichlet e di Neumann.*

Il problema di determinare una funzione  $u$  armonica dentro la regione  $\mathcal{R}$ , quando sono noti i valori che assume sul contorno di  $\mathcal{R}$ , va sotto il nome di *problema di Dirichlet*. In altre parole il problema è risolvere il problema al contorno

$\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{in } \mathcal{R} \\ u = g & \text{in } \partial\mathcal{R} \end{array}$
---

Il teorema precedente ci dice che il problema non può ammettere più di una soluzione. Ben più difficile è dimostrare che esista una soluzione. Al riguardo, in fisica si tende ad utilizzare il metodo costruttivo di Green. Questo metodo verrà studiato nel corso di MMF 2. Nella lezione 12.3 si risolverà in maniera completa e rigorosa il problema di Dirichlet nel piano.

Servendosi della (2) è pure possibile dare un altro teorema di unicità [esercizio]: *se di una funzione  $u$ , armonica dentro la regione finita  $\mathcal{R}$ , si assegnano i valori della sua derivata normale  $\nabla_{\mathbf{n}}u$  sul contorno  $\partial\mathcal{R}$ , la funzione è determinata in tutto  $\mathcal{R}$  a meno di una costante additiva arbitraria.*

Il problema di determinare una funzione  $u$  armonica dentro la regione  $\mathcal{R}$ , quando sono noti i valori della sua derivata normale sul contorno, va sotto il nome di *problema di Neumann*.

Il senso dei due problemi risulta chiaro se si fa riferimento all'elettrostatica: il problema di Dirichlet equivale a determinare il potenziale elettrostatico in una regione di spazio priva di cariche quando è assegnato il potenziale sul bordo della regione: chiaramente la soluzione è unicamente determinata dai valori del potenziale sul bordo. Il problema di Neumann corrisponde a determinare il potenziale in una situazione analoga, quando però sul bordo (immaginiamo una superficie conduttrice) è assegnato il campo elettrico (che è normale alla superficie conduttrice). In questo caso, è chiaro che il potenziale è determinato a meno di una costante additiva arbitraria.