

12.3. **Il problema di Dirichlet nel piano.** In questa lezione si vuole dare risoluzione completa e rigorosa del problema di Dirichlet nel piano:

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{in } \mathcal{R} \\ u = g & \text{in } \partial\mathcal{R} \end{array}$$

12.3.1. **Distribuzione di temperatura in una piastra e teorema di Gauss della media.** Consideriamo un flusso costante di calore in una piastra metallica le cui facce sono isolate. Nell'interno della piastra  $T(z)$  è una funzione armonica,  $\Delta T = 0$ , e il flusso di calore è il campo vettoriale  $\nabla T$ . Misuriamo la temperatura lungo la circonferenza  $C$  di un cerchio di raggio  $R = 1$  (non c'è restrizione, basta cambiare scala di lunghezza), l'interno del quale è privo di sorgenti e pozzi, e il cui centro possiamo scegliere convenientemente come l'origine. Quando  $Z = e^{i\theta}$  si muove lungo  $C$ , possiamo esprimere la temperatura come funzione dell'angolo,

$$T = T(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} T(e^{i\theta})$$

È fisicamente plausibile che questi valori determino la temperatura in qualunque punto interno  $z$ . Sappiamo già che le cose stanno così per il centro del cerchio: il teorema della media di Gauss afferma che

$$T(0) \stackrel{\text{def}}{=} \langle T \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) d\theta$$

e anche se non avessimo saputo nulla del teorema della media, da fisici, questa è la formula che avremmo scritto immediatamente per la temperatura nel centro. Che altro se non questo?

Scopo di questa lezione è mostrare che la chiave di volta per risolvere il problema di Dirichlet nel piano è il teorema della media di Gauss. Essendo questo un risultato profondo di matematica, vogliamo arrivarci per gradi, chiarendo tutti i passi che si devono compiere, cercando di fare apprezzare così la bellezza del risultato che si ottiene. Per il momento abbiamo impostato il problema per il disco unitario  $\mathbb{D}$  con condizioni al contorno sul suo bordo  $\mathbb{T}$

12.3.2. **Risoluzione del problema per trasformazione conforme.** Se esistesse una trasformazione conforme  $z^* = h(z)$  del disco  $\mathbb{D}$  in sè stesso che scambiasse il punto  $z$  con l'origine, allora  $T(z^*)$  sarebbe armonica perché una trasformazione conforme preserva l'armonicità. Inoltre, il problema sarebbe immediatamente risolto: la temperatura nel punto  $z = a$  sarebbe ottenuta con il teorema della media di Gauss per la distribuzione sul bordo trasformata. Avremmo cioè

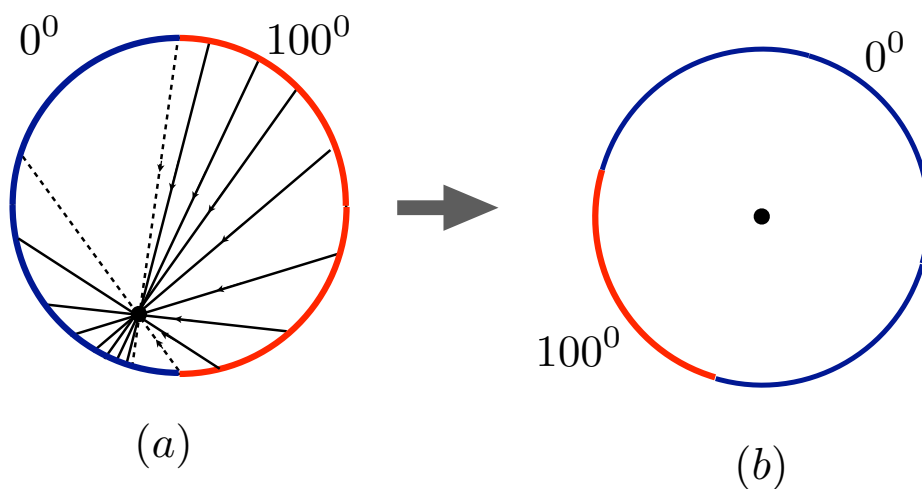
$$(1) \quad T(a) = T(0^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta^*) d\theta,$$

una formula che interpretiamo così: la temperatura in 0 nel piano  $z^*$  è la media della nuova distribuzione di temperatura su  $C$  ottenuta trasportando la temperatura in ogni punto  $Z$  di  $C$  nel nuovo punto  $Z^*$  di  $C$ .

Ma a trasformazione cercata esiste e l'abbiamo appena studiata nella lezione 12.1! È la trasformazione “swap” che scambia un punto qualunque nel cerchio con il centro del cerchio:

$$h(z) = z^* = \frac{Z - a}{\bar{a}Z - 1}, \quad |a| < 1$$

12.3.3. *Ciò che è naturale per la matematica lo è anche per la fisica.* Verifichiamo che la soluzione matematica naturale è anche la soluzione fisica naturale (che avremmo potuto trovare indipendentemente dalla matematica). È fisicamente intuitivo che la temperatura in un punto  $z$  sia una media pesata dei valori sul bordo: se il punto  $z$  è al centro, i punti sul bordo pesano tutti allo stesso modo, se  $z$  non è nel centro occorre pesare diversamente i punti più vicini da quelli più lontani. Ma in che modo? Con un po' di ingegnosità, si arriva alla trasformazione “swap”, nella sua forma geometrica dell'esercizio 1 della lezione precedente. Consideriamo l'esempio considerato da Needham<sup>1</sup>: la metà sinistra è del bordo del cerchio è a  $0^\circ$  e quella di destra a  $100^\circ$



Con la costruzione geometrica dell'esercizio 1 il contributo della parte lontana risulta correttamente ricalibrato: per trovare la temperatura in  $z = a$  si trasporti ciascuna temperatura su  $\mathbb{T}$  nel punto direttamente opposto come visto da  $z = a$ , quindi si prenda la media della nuova distribuzione di temperatura così ottenuta.

<sup>1</sup>Needham fa ben di più: usa la caratterizzazione geometrica per arrivare alla trasformazione swap.

12.3.4. **Formula risolutiva per il disco unitario.** Calcoliamo il secondo membro di (1). Per cambiamento di variabili si ottiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta^*) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) d\theta^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) \frac{d\theta^*}{d\theta} d\theta$$

Ma, per l'esercizio 2 (con  $z$  anziché  $a$ ),

$$\frac{d\theta^*}{d\theta} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}.$$

Allora

$$(2) \quad T(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} T(\theta) d\theta.$$

12.3.5. **Il nucleo integrale di Poisson.** La soluzione dell'equazione di Laplace risulta così espressa in termini del nucleo integrale

$$\frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}$$

che è chiamato *nucleo di Poisson*. È utile conoscere le sue proprietà e comprendere meglio la formula (2).

Incominceremo col riscrivere la formula (2) così

$$(3) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} g(e^{i\theta}) d\theta.$$

Il cambiamento è sia cosmetico sia cautelativo: *cosmetico*, perché abbiamo cambiato nome alla funzione:  $u$  ci ricorda meglio che alle spalle abbiamo una funzione analitica  $f = u + iv$ , di cui, appunto,  $u$  è la parte reale; *cautelativo*, perché abbiamo chiamato  $g$  la condizione al contorno che vorremmo assegnare, più o meno, arbitrariamente. Che sul cerchio  $u$  e  $g$  coincidano, non può essere assunto, ma *deve essere dimostrato*. E la dimostrazione ci dirà quali condizioni  $g$  deve soddisfare.

Procediamo per punti.

**P 1.** *Il nucleo di Poisson è la parte reale di una funzione analitica. Più precisamente, per  $z = re^{it} \in \mathbb{D}$  ( $r < 1$ ) e  $Z = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$  si ha*

$$(4) \quad \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right).$$

*Dim.*

$$\operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{(e^{i\theta} + z)(e^{-i\theta} - \bar{z})}{|e^{i\theta} - z|^2} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}$$

**P 2.** La soluzione  $u = u(z)$  può essere espressa come un prodotto di convoluzione tra il nucleo di Poisson e la funzione sul bordo. In altre parole, la formula (3) può essere riscritta come

$$(5) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) g(e^{i\theta}) d\theta \equiv P_r * g(t), \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}.$$

dove

$$P_r(\phi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\phi) + r^2}.$$

*Dim.* Segue immediatamente dalla (4).

**P 3.** La funzione

$$(6) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) g(e^{i\theta}) d\theta$$

è una funzione analitica in  $\mathbb{D}$  per qualunque funzione integrabile reale  $g$  su  $\mathbb{T}$ .

*Dim.* Segue da Cauchy-Riemann. L'equazione (6) è detta formula di Schwartz e permette di ricostruire la funzione analitica completa  $f(z)$  nel disco  $\mathbb{D}$  a partire dalla sua parte reale su  $\mathbb{T}$ .

**P 4.** La funzione  $u(z) = P_r * g(t)$  è una funzione armonica di  $z = re^{it} \in \mathbb{D}$  per qualunque funzione integrabile  $g$  su  $\mathbb{T}$ .

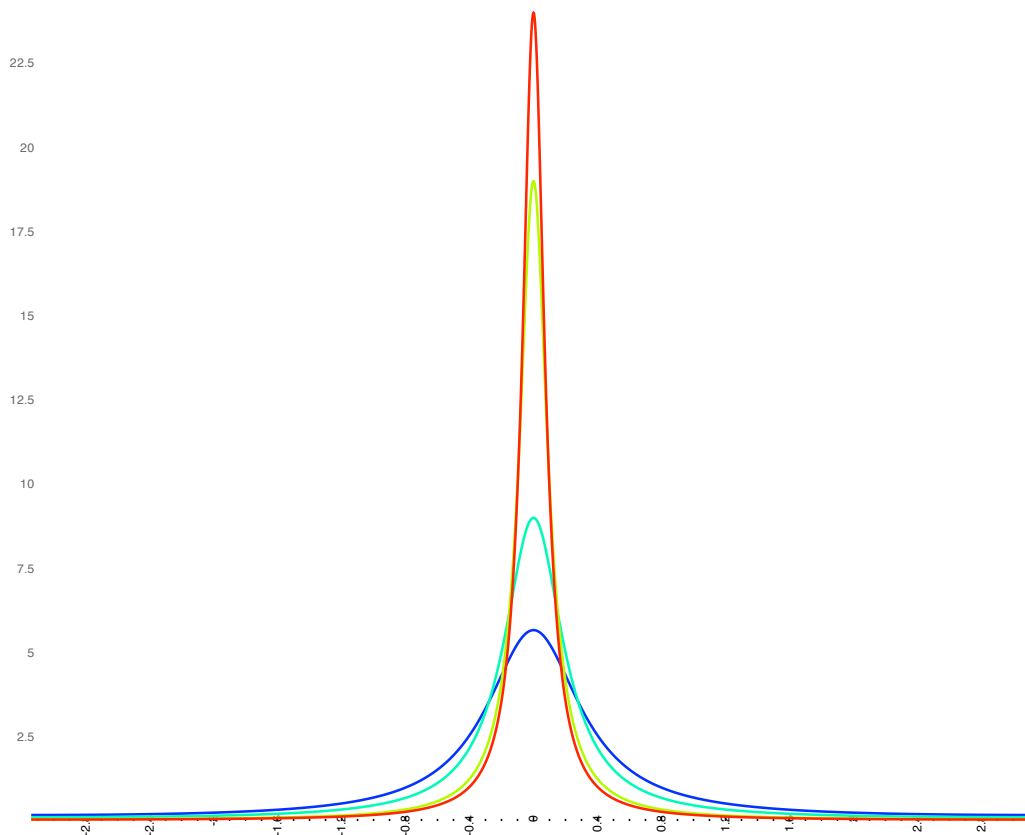
*Dim.* Segue dal fatto che la parte reale di una funzione analitica è armonica e  $u(z)$  è in effetti la parte reale della funzione  $f(z)$  del punto 3:

$$\begin{aligned} P_r * g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) g(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) g(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) g(e^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

Il prossimo punto merita un capitolo a parte.

**12.3.6. Il nucleo di Poisson come successione regolare approssimante la delta.** In figura sono riportati i grafici del nucleo di Poisson per  $r =$

0.7, 0.8, 0.9, 0.92 in  $-\pi \leq \phi < \pi$ .



Sembra una successione di approssimazioni della delta di Dirac e, in effetti, lo è. Ma è la delta su  $\mathbb{T}$  e non su  $\mathbb{R}$ . Data una successione  $r_n$  tendente a 1, la corrispondente successione di nuclei integrali di Poisson

$$P_r(\phi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\phi) + r^2}.$$

è una successione regolare di buone funzioni, nel modo in cui possono essere buone le funzioni su  $\mathbb{T}$ : ovviamente non può esserci decrescenza all'infinito, visto che  $\mathbb{T}$  è compatto. Se prolungassimo  $\phi$  a destra e a sinistra i grafici si ripeterebbero periodicamente.

Le proprietà che rendono la successione  $\frac{1}{2\pi}P_r$ ,  $r \rightarrow 1$ , una successione di approssimanti della delta su  $\mathbb{T}$  sono le seguenti:

- (1)  $P_r(\phi) > 0$  per tutti gli  $z = re^{i\phi} \in \mathbb{D}$  (cioè per  $r < 1$  e  $-\pi \leq \phi < \pi$ ).
- (2)  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\phi) d\phi = 1$
- (3) Il massimo di  $P_r(\phi)$  fuori da qualunque intorno  $(-\delta, \delta)$  di  $\phi = 0$ , non importa quanto sia piccolo, tende a 0 per  $r$  che tende a 1.

Queste proprietà si dimostrano facilmente: (1) è ovvio; (2) è lasciato come esercizio (facile); (3) segue dall'osservazione che  $1 + r^2 > 2r$  (perché  $(1 - r)^2 > 0$ ), da cui

$$P_r(\phi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\phi) + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{2r(1 - \cos(\phi))}.$$

che tende a 0 per  $r \uparrow 1$  in tutti i punti per cui  $\cos \phi \neq 1$ .

**12.3.7. Teorema principale di convergenza uniforme.** Vogliamo adesso dimostrare che se  $g$  è una funzione continua su  $\mathbb{T}$ , la funzione

$$u(z) = u(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) g(\theta) d\theta, \quad z = re^{it} \in \mathbb{D}$$

converge *uniformemente* a  $g$  quando  $r$  tende a 1 (per semplicità di notazione abbiamo scritto  $g(s)$  invece di  $g(e^{is})$ ).

*Dim.* Stimiamo l'errore tra il limite e la funzione  $u$ :

$$E_r(t) = |g(t) - u(r, t)| = \left| g(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) g(\theta) d\theta \right|$$

Per cambiamento di variabili  $t - \theta = s$ , si ha

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t - \theta) g(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) g(t - s) ds$$

Allora

$$E_r(t) = \left| g(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) g(t - s) ds \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) [g(t) - g(t - s)] ds \right|,$$

essendo  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) ds = 1$ . Poiché il modulo dell'integrale è minore o uguale dell'integrale del modulo (e  $P_r(s)$  è positiva), otteniamo

$$E_r(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) |g(t) - g(t - s)| ds.$$

I problemi nascono da  $s = 0$ , dove  $P_r(s)$  diverge. Separiamo allora l'integrazione in due parti, una su un piccolo intorno dello 0 e l'altra sul resto:

$$E_r(t) \leq \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right] P_r(s) |g(t) - g(t - s)| ds.$$

La funzione  $g$  è continua in un intervallo chiuso e limitato e quindi limitata da una costante  $M$ . Per  $|s| > \delta$  il massimo di  $P_r(s)$  è maggiorato da  $\frac{1-r^2}{2r(1-\cos(\delta))}$  che tende a zero per  $r$  che tende a 1. Quindi

$$E_r(t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(s) |g(t) - g(t - s)| ds + 2M \frac{1 - r^2}{2r(1 - \cos(\delta))}.$$

La funzione  $g$  è continua su  $\mathbb{T}$ , ma poichè  $\mathbb{T}$  è compatto (=chiuso e limitato) per il *Teorema di Heine-Cantor* è anche uniformemente continua. Si fissi allora un  $\epsilon$

arbitrario, dalla continuità uniforme segue che esiste un  $\delta > 0$  tale che per tutti i  $t$  e  $s$  con  $|s| < 1$  si ha  $|g(t) - g(t - s)| < \epsilon/2$ . Quindi, per ogni  $\epsilon$  esiste un  $\delta$  tale che

$$E_r(t) \leq \frac{\epsilon}{2} + 2M \frac{1 - r^2}{2r(1 - \cos(\delta))}.$$

Si prenda  $r$  così vicino a 1 che il secondo termine sia minore di  $\epsilon/2$ . Allora

$$E_r(t) \leq \epsilon$$

Che è quando si voleva dimostrare: l'errore tende a zero uniformemente in  $t$ , cioè la funzione  $u(z)$ , armonica nel disco  $\mathbb{D}$  converge *uniformemente* al suo valore assegnato  $g$  sulla frontiera  $\mathbb{T}$  quando  $z$  tende a un punto della frontiera.

In questo modo risulta stabilita l'esistenza di soluzioni del problema di Dirichlet nel disco con condizioni continue al bordo. L'unicità è stata stabilita nella lezione 12.2.4. Fine (per il disco).

**12.3.8. Il problema generale.** Per il teorema delle rappresentazioni di Riemann, risolto il disco, il problema è risolto (esistenza e unicità della soluzione) per qualunque regione la cui frontiera è una curva semplice chiusa.