

13.1. ABC di analisi funzionale I.

13.1.1. *Spazi di Banach.* Le funzioni possono essere sommate e moltiplicate—formano naturalmente un spazio vettoriale. Ma molto di più sulle loro proprietà geometriche può essere detto. Si può parlare di “lunghezza” di una funzione, di distanza euclidea tra due funzioni e di “angolo” tra funzioni. Per familiarizzarci con queste idee, consideriamo le funzioni continue (a valori reali o complessi) su un intervallo chiuso $[a, b]$. Se f e g sono funzioni continue, chiaramente anche

$$\alpha f + \beta g,$$

dove α e β sono scalari, lo è: le funzioni continue formano uno spazio vettoriale. Si può parlare di lunghezza, o norma, di una funzione continua, e ci sono molti modi di farlo. Consideriamo la cosiddetta “norma del sup”, o norma uniforme, così definita

$$(1) \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

È facile convincersi che questa nozione di lunghezza per funzioni ha i seguenti requisiti

- (i) $\|f\|_\infty > 0$ se $f \neq 0$
- (ii) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$
- (iii) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (disuguaglianza triangolare¹)

Le proprietà (i) e (ii) sono facilmente verificate e lo stesso può dirsi per la disuguaglianza triangolare, anche se in questo caso qualche parola in più può essere spesa: la disuguaglianza triangolare per numeri reali è ovvia

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

e da questa discende

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|$$

Si ritiene che la nozione di lunghezza, sia astrattamente caratterizzata dalle proprietà (i), (ii) e (iii). Quando uno spazio vettoriale può essere equipaggiato con una norma, cioè una funzione a valori reali positivi che gode delle proprietà (i), (ii) e (iii), si dice che è uno spazio vettoriale normato. Dunque, $C[a, b]$, lo spazio delle funzioni continue su $[a, b]$ con norma (1), è uno spazio normato.

Dalla nozione di lunghezza di una funzione si può facilmente passare alla nozione di distanza tra funzioni. Se definiamo

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty$$

vediamo immediatamente che sono soddisfatte le proprietà

- (i) $d(f, g) \geq 0$ (positività)

¹La somma delle lunghezze di due lati di un triangolo è maggiore o uguale della lunghezza del terzo lato.

- (ii) $d(f, g) = 0$ sse $f = g$
- (iii) $d(f, g) = d(g, f)$ (simmetria)
- (iv) $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$ (disuguaglianza triangolare)

Queste proprietà sono verificate dall'usuale nozione di distanza tra punti di uno spazio euclideo finito-dimensionale. Si ritiene che, astrattamente, la nozione di distanza sia caratterizzata unicamente da queste proprietà e che quindi sia lecito parlare di distanza anche in uno spazio infinito-dimensionale, purché queste condizioni siano soddisfatte.

Se si ha una nozione di distanza si ha una nozione metrica di vicinanza tra punti. Se si ha una nozione di vicinanza, si può parlare di convergenza di una successione (f_n) di punti nel modo seguente. La successione (f_n) converge a f se la distanza tra f_n e f tende a zero, cioè se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\infty} = 0$$

Ora, il problema è che, in generale, non è detto che il limite di una successione di elementi che appartengono ad una classe sia ancora un elemento di quella classe. L'esempio paradigmatico sono i razionali: in generale, successioni di razionali non convergono a numeri razionali, ma a un numero reale non razionale. In effetti, i reali sono caratterizzati così, come successioni di razionali. Quando si passa al limite la cautela è d'obbligo. È per questa ragione che Cauchy introdusse la nozione di convergenza che prende il suo nome: si vuole avere un criterio intrinseco per decidere se una successione converge oppure no, indipendentemente dall'esistenza o meno del limite nella classe in cui sono gli elementi della successione. La condizione di Cauchy è quanto di più ovvio e naturale si possa pensare: la successione converge se la distanza tra elementi della successione tende a zero o, per essere più pedanti, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste intero positivo N tale che per tutti $m, n > N$, $d(f_n, f_m) < \epsilon$.

Non è difficile convincersi che ogni successione di Cauchy (f_n) in $C[a, b]$ converge ad un elemento di $C[a, b]$. In primo luogo, si deve osservare che la convergenza nella norma uniforme è la convergenza uniforme, nota dai corsi di analisi; Si vedano la dimostrazioni 1 della sezione 13.1.7. In secondo luogo, deve essere chiaro che se (f_n) è una successione di funzioni continue che converge uniformemente a f , allora f è continua² Si veda la dimostrazione 2 della sezione 13.1.7.

Uno spazio normato, in cui ogni successione di Cauchy converge ad un elemento dello spazio stesso, è detto completo. Uno spazio di questo tipo è anche noto come spazio di Banach. Dunque, $C[a, b]$ è un esempio di spazio vettoriale normato completo. In altre parole, è uno spazio di Banach. Per stabilire se un spazio normato è completo, è utile il seguente criterio (per la dimostrazione, si veda la 6 della sezione 13.1.7).

²**NB** È essenziale che la convergenza sia uniforme: in generale, il limite puntuale di funzioni continue non è necessariamente una funzione continua.

Teorema 1 (Criterio di completezza per uno vettoriale spazio normato). *Uno spazio vettoriale normato è completo se e solo se ogni serie assolutamente convergente nello spazio è convergente. In altre parole, il criterio di completezza è*

$$(2) \quad \text{Se } \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty \quad \text{allora } \sum_{k=1}^{\infty} v_k \quad \text{converge}$$

13.1.2. **Spazi di Hilbert.** Uno spazio di Banach, pur avendo una struttura per molti versi analoga a quella dello spazio euclideo finito-dimensionale, è privo di una nozione di “angolo” tra vettori o, per essere più precisi, di prodotto scalare tra vettori. Vediamo come sono fatti gli spazi vettoriali muniti di prodotto scalare.

Si assumono note le proprietà dello spazio euclideo complesso \mathbb{C}^n , lo spazio dei vettori $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, con componenti z_i complesse. In questo spazio, è definito il prodotto scalare

$$(3) \quad \langle \mathbf{z} | \mathbf{w} \rangle = \bar{z}_1 w_1 + \dots + \bar{z}_n w_n$$

tra coppie di vettori. Si dimostra facilmente che il prodotto scalare così definito gode delle seguenti proprietà:

- (i) $\langle \mathbf{z} | \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w} | \mathbf{z} \rangle}$ (simmetria coniugata)
- (ii) $\langle \mathbf{u} | \alpha \mathbf{z} + \beta \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u} | \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle$ (linearità nel secondo argomento³)
- (iii) $\langle \mathbf{z} | \mathbf{z} \rangle \geq 0$ (=0 sse $\mathbf{z} = 0$) (positività)

Si osservi che (i) e (ii) implicano

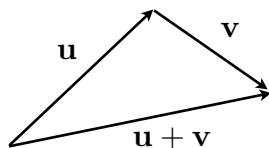
$$\langle \alpha \mathbf{z} + \beta \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle = \bar{\alpha} \langle \mathbf{z} | \mathbf{u} \rangle + \bar{\beta} \langle \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle$$

Il prodotto scalare in \mathbb{C}^n è dunque una forma definita su coppie di vettori di \mathbb{C}^n che è lineare in un argomento e antilineare nell'altro. Una forma di questo tipo è detta *hermitiana* o *sesquilineare*.

Se c'è un prodotto scalare tra vettori, c'è anche una nozione di lunghezza: la lunghezza del vettore $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ è data dal *teorema di Pitagora*

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} = \sqrt{\langle \mathbf{z} | \mathbf{z} \rangle}$$

La lunghezza soddisfa proprietà (i), (ii) e (iii) della norma, in particolare la disuguaglianza triangolare $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$,



che stabilisce che la somma delle lunghezze di due lati di un triangolo è maggiore o uguale della lunghezza del terzo lato.

³**N.B.** È convenzionale richiedere la linearità rispetto al primo o al secondo argomento. Nella letteratura matematica, la linearità è rispetto al primo argomento. I fisici tendono a non seguire la convenzione dei matematici e qui non faremo eccezione.

La disuguaglianza triangolare si verifica facilmente a partire dalla (3). Ma c'è anche un modo più complicato per verificarla, che a posteriori risulta più profondo e utile. Questo modo si realizza in due passi. Primo passo: a partire dalle proprietà (i) (ii) e (iii) del prodotto scalare e dalla *definizione*

$$(4) \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle},$$

si dimostra la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$(5) \quad |\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| .$$

Secondo passo: si usa la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per dimostrare la disuguaglianza triangolare. Si vedano le dimostrazioni 3 e 4 della sezione 13.1.7.

Qual è il vantaggio di questo modo più complicato di ottenere la disuguaglianza triangolare? Un guadagno notevole di generalità! Dato un qualunque spazio vettoriale in cui è definito un prodotto scalare che soddisfa le proprietà (i), (ii) e (iii) del prodotto scalare, questo spazio risulta automaticamente uno spazio normato, con norma definita dalla (4). Infatti, le proprietà (i) e (ii) della norma sono banalmente verificate e la disuguaglianza triangolare vale in quanto conseguenza della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. *Qualunque riferimento alla dimensione finita dello spazio è stato così eliminato* e il fatto che uno spazio con prodotto scalare diventi uno spazio normato è indipendente dalla sua dimensione; in altre parole, vale anche per spazi di dimensione infinita. Se lo spazio normato così ottenuto è completo, cioè è uno spazio di Banach rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare, è chiamato *spazio di Hilbert*. Un generico spazio di Hilbert verrà denotato con la lettera \mathcal{H} .

Teoremi dimostrati per un generico spazio di Hilbert varranno automaticamente per spazi di Hilbert concreti, di cui, nel seguito vedremo esempi particolarmente importanti. Ecco un esempio di teorema che vale per uno spazio di Hilbert generico che si dimostra facilmente a partire dalle proprietà del prodotto scalare e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Esercizio 1 (Continuità del prodotto scalare). *Se $\{\mathbf{u}_n\}$ e $\{\mathbf{v}_n\}$ sono due successioni di vettori di \mathcal{H} che convergono in norma,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_n = \mathbf{u} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}_n = \mathbf{v} ,$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathbf{u}_n | \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$$

13.1.3. Lo spazio delle successioni a quadrato sommabile. Lo spazio \mathbb{C}^n , con prodotto scalare dato da (3) è uno spazio di Hilbert finito-dimensionale. L'esempio più semplice di spazio di Hilbert infinito-dimensionale è lo spazio delle successioni a quadrato sommabile, vale a dire delle successioni infinite $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots)$,

con componenti z_k complesse, tali che

$$(6) \quad \|z\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty$$

Questo spazio è usualmente chiamato ℓ^2 . In ℓ^2 il prodotto scalare è così definito

$$(7) \quad \langle z | w \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{z}_k w_k$$

La serie a secondo membro converge in virtù della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (esercizio). Lo spazio ℓ^2 è completo ed è quindi *bona fide* uno spazio di Hilbert. Si veda la dimostrazione 5 della sezione 13.1.7.

13.1.4. Notazione di Dirac. In meccanica quantistica, lo stato di un sistema fisico è rappresentato da un raggio in uno spazio di Hilbert complesso e separabile (daremo la definizione nella prossima lezione) o, equivalentemente, da un punto nello spazio di Hilbert proiettivo del sistema. Con in mente le applicazioni della teoria degli spazi di Hilbert alla meccanica quantistica, Dirac introdusse la notazione dei bra e dei ket per descrivere i vettori di uno spazio di Hilbert. Questa notazione può essere descritta nel seguente modo.

Incominciamo col complicarci la vita e rappresentiamo un vettore \mathbf{u} di \mathcal{H} con il simbolo $|\mathbf{u}\rangle$. Lo chiameremo vettore “ket”, ma resta sempre lo stesso vettore \mathbf{u} di prima. Adesso rappresentiamo lo stesso vettore \mathbf{u} con il simbolo $\langle \mathbf{u}|$, che chiameremo vettore “bra”, ma resta sempre, di nuovo, lo stesso vettore di prima. Introduciamo infine le seguenti regole per manipolare i simboli di bra e ket

$$|\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}\rangle = \alpha |\mathbf{u}\rangle + \beta |\mathbf{v}\rangle \quad \langle \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}| = \bar{\alpha} \langle \mathbf{u}| + \bar{\beta} \langle \mathbf{v}|$$

Il prodotto scalare (“braket”⁴) risulta, simbolicamente, il prodotto dei simboli bra e ket,

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{u} | | \mathbf{v} \rangle$$

La notazione rende così manifesto che il prodotto scalare è una forma hermitiana (lineare in un argomento e antilineare nell’altro).

Si può dare alla notazione simbolica anche un significato matematico e identificare i “bra” con il duale \mathcal{H}^* di \mathcal{H} (cioè lo spazio dei funzionali lineari continui su \mathcal{H}), il quale, a sua volta, per il teorema di Riesz, è naturalmente identificato con \mathcal{H} . Ma si tratta di una sofisticazione matematica non necessaria: la notazione di Dirac è, appunto, una notazione simbolica (indipendentemente da che cosa ne pensasse Dirac stesso). I “bra” e “ket” sono un mero artificio simbolico e non bisogna farsi fuorviare e pensare che per rappresentare lo stato di un sistema fisico

⁴Risulta così svelato l’arcano della terminologia “bra” e “ket”: “braket” in inglese vuol dire “parentesi” (e ci sono ovviamente due tipi di parentesi, quelle che hanno la gobba a sinistra e quelle che la hanno a destra). Questa terminologia, che riflette anche un sottile humor, è di Dirac.

siano necessari due tipi distinti di vettori, i “bra” e i “ket” o che il prodotto scalare sia tra un prodotto misterioso di un “bra” e di un “ket”.

La notazione di Dirac è particolarmente conveniente per denotare l'operatore di proiezione ortogonale su un vettore \mathbf{v} con

$$\frac{|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}|}{\langle\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle} = |\mathbf{e}_v\rangle\langle\mathbf{e}_v|, \quad \mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

per cui la proiezione di \mathbf{u} lungo \mathbf{v} risulta

$$|\mathbf{e}_v\rangle\langle\mathbf{e}_v|\mathbf{u}\rangle.$$

Con la notazione di Dirac, risulta particolarmente trasparente che il quadrato del proiettore sia il proiettore stesso: $|\mathbf{e}_v\rangle\langle\mathbf{e}_v||\mathbf{e}_v\rangle\langle\mathbf{e}_v| = |\mathbf{e}_v\rangle\langle\mathbf{e}_v|$, in quanto $\langle\mathbf{e}_v||\mathbf{e}_v\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\mathbf{e}_v|\mathbf{e}_v\rangle = 1$.

13.1.5. Sistemi ortogonali di vettori e serie di Fourier. Una successione (limitata o infinita) di vettori $\{\mathbf{e}_n\}$ in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} per cui $\langle\mathbf{e}_n|\mathbf{e}_m\rangle = 0$ quando $n \neq m$ si chiama *sistema ortogonale*. Se inoltre si ha $\langle\mathbf{e}_n|\mathbf{e}_n\rangle = \|\mathbf{e}_n\| = 1$, il sistema si chiama *ortonormale*. Se un sistema ortogonale è formato da un numero finito n di vettori, questi vettori sono necessariamente *linearmente indipendenti*. Infatti dalla relazione

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \dots + a_n\mathbf{e}_n = 0$$

considerando il prodotto scalare con l'elemento \mathbf{e}_i , $i = 1, \dots, n$ si deduce che $a_i = 0$, per $i = 1, \dots, n$. Quindi in uno spazio di Hilbert di dimensione finita un sistema ortonormale è costituito da non più di n elementi.

Consideriamo allora il caso in cui la dimensione di \mathcal{H} è infinita e supponiamo che esista un sistema ortonormale infinito $\{\mathbf{e}_n\}$. Supponiamo che esista una successione di costanti c_1, c_2, \dots tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n$$

converga in norma verso \mathbf{u} , cioè

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{e}_n \right\| = 0.$$

Allora

$$\langle\mathbf{e}_m|\mathbf{u}\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \mathbf{e}_m \left| \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{e}_n \right. \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N c_n \langle\mathbf{e}_m|\mathbf{e}_n\rangle = c_m$$

Lo scambio di limite con il prodotto scalare è giustificato dall'esercizio 1 e l'ultimo passaggio segue dall'ortonormalità del sistema $\{\mathbf{e}_n\}$. In altre parole, i coefficienti c_n , $n = 1, 2, \dots$, sono dati dalle formule

$$c_n = \langle\mathbf{e}_n|\mathbf{u}\rangle \quad n = 1, 2, \dots$$

e sono detti coefficienti di Fourier del vettore \mathbf{u} rispetto al sistema ortonormale $\{\mathbf{e}_n\}$. Risulta così dimostrato il teorema

Teorema 2. *Se esiste una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n$ che converge in norma a \mathbf{u} , allora i coefficienti c_n della serie sono dati da*

$$c_n = \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \quad n = 1, 2, \dots$$

Si osservi l'utilità della notazione di Dirac: Il contenuto del precedente teorema può essere espresso in forma compatta mediante la formula

$$|\mathbf{u}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{e}_n\rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle,$$

una formula che risulta particolarmente facile da ricordare e manipolare.

Fissiamo adesso un vettore \mathbf{u} e consideriamo la serie di Fourier generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{e}_n\rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle.$$

Si pone naturalmente la domanda se tale serie converga in norma verso \mathbf{u} . Per rispondere a questa domanda, calcoliamo la norma al quadrato della differenza tra il vettore \mathbf{u} e la somma parziale N -esima della serie:

$$(8) \quad \left\| |\mathbf{u}\rangle - \sum_{n=1}^N |\mathbf{e}_n\rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \right\|^2 = \left\langle \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \mathbf{e}_n \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \left| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N \mathbf{e}_n \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \right. \right\rangle$$

$$(9) \quad = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle - 2 \sum_{n=1}^N |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 + \sum_{n=1}^N |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2$$

$$(10) \quad = \|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2$$

Da cui segue:

Teorema 3 (Criterio di convergenza di una serie di Fourier generalizzata). *Condizione necessaria e sufficiente affinché per un vettore \mathbf{u} si abbia*

$$|\mathbf{u}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{e}_n\rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle.$$

è che sia soddisfatta l'identità di Parseval

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$$

A questo riguardo, si osservi che, indipendentemente dal fatto che la serie converga a \mathbf{u} , il secondo membro della (12) è sempre positivo. Passando al limite $N \rightarrow \infty$ della (10), si ottiene

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2$$

che è nota come *disuguaglianza di Bessel*.

Particolarmente importanti sono i sistemi ortonormali per i quali *qualunque* sia il vettore \mathbf{u} nello spazio di Hilbert, l'identità di Parseval

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$$

è verificata. Tali sistemi si chiamano *completi* o anche *basi ortonormali*.

L'esistenza di un sistema ortonormale completo *numerabile* non può essere data per scontata. In effetti, non è conseguenza delle proprietà del prodotto scalare e della completezza della norma da esso indotta. Se uno spazio di Hilbert ha una base ortogonale completa numerabile è detto *separabile*. Nel seguito assumeremo tacitamente che questa condizione sia soddisfatta e identificheremo la nozione di spazio di Hilbert con quella di spazio di Hilbert separabile.

Un'altra nozione importante è la nozione di sistema ortogonale *chiuso*, condizione che si realizza quando non esiste alcun vettore non nullo nello spazio di Hilbert che sia ortogonale a tutti gli elementi del sistema. In altre parole, un sistema $\{\mathbf{e}_n\}$ è chiuso se dalle relazioni

$$\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

segue che $\mathbf{u} = 0$. Chiusura e completezza di un sistema ortonormale sono identificate dal seguente teorema (si veda la dimostrazione 7 nella sezione 13.1.7)

Teorema 4 (Criterio di completezza di una base ortonormale). *Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema ortonormale sia completo è che sia chiuso.*

13.1.6. *Schema riassuntivo.*

- *Spazio vettoriale.* Sui reali o sui complessi. Si assume sia noto tutto al riguardo. In particolare, che la dimensione di uno spazio vettoriale è la cardinalità di una sua base.
- *Spazio metrico.* Insieme equipaggiato con una nozione di distanza, o metrica, tra coppie di suoi elementi, avente le seguenti proprietà

- (1) $d(x, y) \geq 0$ (positività)
- (2) $d(x, y) = 0$ sse $x = y$
- (3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria)
- (4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (disuguaglianza triangolare)

[Si osservi che (1) segue da (2,3,4).]

- *Successione di Cauchy.* Successione (x_n) di punti in un spazio metrico con la seguente proprietà: per ogni $\epsilon > 0$ esiste intero positivo N tale che per tutti $m, n > N$, $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

- *Spazio metrico completo.* Spazio metrico in cui ogni successione di Cauchy di suoi elementi converge a un suo elemento.

- *Spazio vettoriale normato.* Spazio vettoriale equipaggiato con una nozione di lunghezza, o norma, avente le seguenti proprietà

- (1) $\|v\| > 0$ se $v \neq 0$
- (2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
- (3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare)

Uno spazio vettoriale normato è automaticamente metrico, con distanza indotta dalla norma, $d(u, v) = \|u - v\|$.

- *Spazio vettoriale normato completo, alias “spazio di Banach”.* Spazio metrico vettoriale normato, completo rispetto alla metrica $d(u, v) = \|u - v\|$ indotta dalla norma.

- *Criterio di completezza per uno vettoriale spazio normato.* Uno spazio vettoriale normato è completo se e solo se ogni serie assolutamente convergente nello spazio è convergente. In altre parole, il criterio di completezza è

$$(13) \quad \text{Se } \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty \quad \text{allora } \sum_{k=1}^{\infty} v_k \quad \text{converge}$$

Si veda la dimostrazione 6 nella sezione 13.1.7.

- *Spazio vettoriale con prodotto scalare, alias “spazio pre-hilbertiano”.* Spazio vettoriale equipaggiato con nozioni di angolo (tra vettori) e lunghezza (di vettori), compatteamente riassunte dalla nozione di prodotto scalare $\langle | \rangle$, avente le seguenti proprietà

- (1) $\langle \phi | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \phi \rangle}$ (simmetria coniugata)
- (2) $\langle \phi | \alpha\psi + \beta\chi \rangle = \alpha\langle \phi | \psi \rangle + \beta\langle \phi | \chi \rangle$ (linearità nel secondo argomento)
- (3) $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$ ($=0$ sse $\psi = 0$) (positività)

Si osservi che (1) e (2) implicano $\langle \alpha\psi + \beta\chi | \phi \rangle = \bar{\alpha}\langle \psi | \phi \rangle + \bar{\beta}\langle \chi | \phi \rangle$ (il prodotto scalare è dunque una forma detta hermitiana o sesquilineare, cioè una forma definita su coppie di vettori di uno spazio vettoriale complesso che è lineare in un argomento e antilineare nell'altro).

- *Proprietà del prodotto scalare di uno spazio pre-hilbertiano.*

(1) Vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|\langle \phi | \psi \rangle| \leq \|\phi\| \|\psi\| .$$

dove

$$\|\phi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \phi | \phi \rangle}, \quad \|\psi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$$

(2) Uno spazio pre-hilbertiano è normato, con norma

$$\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle}$$

ed è quindi uno spazio metrico, con distanza indotta dalla norma

$$d(\psi, \phi) = \|\psi - \phi\| = \sqrt{\langle \psi - \phi | \psi - \phi \rangle} .$$

- *Spazio vettoriale con prodotto scalare completo, alias “spazio di Hilbert”.* Spazio vettoriale con prodotto scalare completo nella metrica indotta dal prodotto scalare. Dunque, uno spazio di Hilbert è automaticamente uno spazio di Banach.
- *Sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert.* Una successione (limitata o infinita) di vettori $\{\mathbf{e}_n\}$ per cui $\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_m \rangle = 0$ e $\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{e}_n \rangle = \|\mathbf{e}_n\| = 1$.
- *Criterio di convergenza di una serie di Fourier generalizzata.* Per un vettore \mathbf{u} in uno spazio di Hilbert e sistema ortonormale $\{\mathbf{e}_n\}$:

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbf{e}_n\rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle \quad \text{se e solo se} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$$

- *Disuguaglianza di Bessel.* Vettore \mathbf{u} e sistema ortonormale $\{\mathbf{e}_n\}$ in uno spazio di Hilbert. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2$$

- *Definizione di sistema ortormale completo o base ortonormale $\{\mathbf{e}_n\}$.* Se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \quad (\text{identità di Parseval})$$

per *qualsunque vettore \mathbf{u}* nello spazio di Hilbert.

- *Spazio di Hilbert separabile.* Quando ammette un sistema ortonormale completo numerabile.
- *Sistema ortogonale chiuso.* Quando non esiste alcun vettore non nullo nello spazio di Hilbert che sia ortogonale a tutti gli elementi del sistema.
- *Criterio di completezza di una base ortonormale.* Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema ortonormale sia completo è che sia chiuso.

13.1.7. *Dimostrazioni.*

Dimostrazione 1 (Convergenza nella norma uniforme = convergenza uniforme). Se (f_n) è una successione di funzioni continue in $[a, b]$, allora

$$(14) \quad f_n \xrightarrow{\text{uniforme}} f \Leftrightarrow \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

A questo proposito, ricordiamo che convergenza uniforme significa che per ogni ϵ positivo esiste un N , lo stesso per tutti gli x in $[a, b]$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

per tutti gli $n \geq N$ e tutti gli x in $[a, b]$. È quindi facile vedere la direzione \Rightarrow della (14): se $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ per tutti gli x in $[a, b]$, lo stesso vale quando si passa a sup, e viceversa. La direzione \Leftarrow è altrettanto facile ed è lasciata come esercizio. \square

Dimostrazione 2 (Completezza di $C[a, b]$ rispetto alla norma uniforme). Si osservi che per x fissato, $(f_n(x))$ è una successione di Cauchy di numeri reali e quindi esiste il limite $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (convergenza puntuale). Ma la convergenza è anche uniforme. Infatti, essendo (f_n) è una successione di Cauchy allora c'è un N , indipendente da x , tale che $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, per tutti gli n e m maggiori di N . Il che implica che $|f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ per tutti gli $m \geq N$ e gli $x \in [a, b]$. Ergo, f_m converge a f uniformemente. Poiché f è il limite uniforme di funzioni continue, f stessa è continua e quindi (f_n) converge a f in $C[a, b]$. \square

Dimostrazione 3 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Dimostriamo la (5),

$$|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| .$$

Se $\mathbf{v} = 0$ la disuguaglianza è banalmente verificata. Assumiamo $\mathbf{v} \neq 0$ e consideriamo $\|\mathbf{u} - t\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}\| \geq 0$, dove t è un qualunque numero reale. Sviluppamo la norma sulla base della (4),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{u} - t\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} - t\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v} | \mathbf{u} - t\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - 2|\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle|^2 t + |\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle|^2 \|\mathbf{v}\|^2 t^2 \end{aligned}$$

Si scelga il valore di t che minimizza la forma quadratica a secondo membro: derivando rispetto al tempo si ottiene $t = 1/\|\mathbf{v}\|^2$. Allora

$$0 \leq \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle - \frac{|\langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle|^2}{\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle}$$

che è vera sse $|\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz risulta così verificata. \square

Dimostrazione 4 (Disuguaglianza triangolare). *Dimostriamo la disuguaglianza triangolare per la norma indotta dal prodotto scalare. Si ha*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \quad (\text{per Cauchy-Schwarz}) \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

□

Dimostrazione 5 (Completezza di ℓ^2). *Dimostriamo che ogni successione di Cauchy in ℓ^2 converge ad un elemento di ℓ^2 . Sia $(\mathbf{z}^{(n)})$ una qualunque successione di Cauchy in ℓ^2 , cioè tale che*

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{z}^{(m)}\| = 0$$

e dimostriamo che esiste un elemento $\mathbf{z} \in \ell^2$ tale che

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{z}\| = 0$$

Osserviamo che, essendo per ogni indice k

$$|z_k^{(n)} - z_k^{(m)}| \leq \|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{z}^{(m)}\| ,$$

esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_k^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} z_k .$$

Proviamo ora che la successione $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots)$ è in ℓ^2 . Infatti, fissato un generico N , tronchiamo le successioni fino a N , ottenendo così vettori nello spazio vettoriale finito dimensionale \mathbb{C}^N . Denotiamo con un pedice N i vettori così ottenuti e consideriamo la disuguaglianza triangolare in \mathbb{C}^N

$$\|\mathbf{z}_N^{(n)}\| \leq \|\mathbf{z}_N^{(n)} - \mathbf{z}_N^{(m)}\| + \|\mathbf{z}_N^{(m)}\|$$

cioè

$$\sqrt{\sum_{k=1}^N |z_k^{(n)}|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^N |z_k^{(n)} - z_k^{(m)}|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^N |z_k^{(m)}|^2}$$

L'osservazione importante è che il primo membro è limitato da una costante indipendente da n e da N , possiamo quindi passare al limite $n \rightarrow \infty$ a primo membro e stabilire così la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^N |z_k|^2$$

Per provare ora la (15), osserviamo che, fissato $\epsilon > 0$, esiste N_ϵ tale che per tutti gli n e m maggiori di N_ϵ , si ha (essendo $(z^{(n)})$ una successione di Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| z_k^{(m)} - z_k^{(n)} \right|^2 < \epsilon^2$$

da qui, passando al limite per $m \rightarrow \infty$, segue

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| z_k - z_k^{(n)} \right|^2 < \epsilon^2,$$

cioè la (15). □

Dimostrazione 6 (Criterio di completezza per uno vettoriale spazio normato). Se lo spazio è completo e $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < \infty$, si consideri le somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^n v_k$. Dalla disuguaglianza triangolare, per $m < n$ si ha

$$\|s_n - s_m\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|v_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|v_k\| < \epsilon$$

se m è abbastanza grande, il che mostra che (s_n) è una successione di Cauchy. Viceversa, si assuma che ogni serie assolutamente convergente sia convergente e si consideri una successione di Cauchy (u_n) . Si prenda successivamente $k_1 < k_2 < \dots$ in modo tale che $\|u_m - u_n\| < 2^j$ quando $m, n \geq k_j$. Si ponga $v_1 = u_{k_1}$ e $v_{k_j} = u_{k_{j+1}} - u_{k_j}$. Allora $\|v_j\| < 2^j$ per $j > 2$ e quindi $\sum_{j=1}^{\infty} v_j$ è assolutamente convergente e quindi convergente. Poiché $u_{k_j} = v_1 + v_2 + \dots + v_j$, la successione (u_{k_j}) è convergente. Abbiamo mostrato che ogni successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente, che è abbastanza per dimostrare la completezza. □

Dimostrazione 7 (Se un sistema ortonormale $\{e_n\}$ è completo è anche chiuso e viceversa). Supponiamo che il sistema ortonormale $\{e_n\}$ sia completo. Se non fosse anche chiuso esisterebbe un vettore \mathbf{v} con $\|\mathbf{v}\| > 0$ tale $\langle e_n | \mathbf{v} \rangle = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. In tal caso avremmo

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n | \mathbf{v} \rangle < \|\mathbf{v}\|,$$

contro l'ipotesi che il sistema sia completo. Viceversa, se $\{e_n\}$ fosse chiuso ma non completo, esisterebbe un vettore \mathbf{u} tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |e_n\rangle \langle e_n | \mathbf{u} \rangle \neq \mathbf{u}$$

e per il vettore

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \sum_{n=1}^{\infty} |e_n\rangle \langle e_n | \mathbf{u} \rangle$$

risulterebbe

$$\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

contro l'ipotesi che $\{\mathbf{e}_n\}$ sia chiuso. \square

APPENDICE

13.1.8. **L'oscillatore armonico quantistico.** Concludiamo la lezione con alcuni richiami sull'oscillatore armonico quantistico (già visto nel corso di meccanica quantistica). Lo scopo è di fornire un esempio concreto in cui alcune delle idee matematiche presentate finora (e nelle prossime lezioni) possono essere messe alla prova.

Richiamiamo l'equazione di Schrödinger per l'oscillatore armonico

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \psi$$

per la funzione d'onda $\psi = \psi(x, t)$ con condizione iniziale $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$. Osserviamo che $\sqrt{\hbar/m\omega_0}$ ha le dimensioni di uno spazio e $1/\omega_0$ di un tempo. Passiamo dunque alle variabili adimensionali

$$\tau = t/\omega_0, \quad q = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} x.$$

Poiché

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega_0 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{m\omega_0}{\hbar} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2}$$

l'equazione di Schrödinger diventa

$$i\hbar\omega_0 \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{m\omega_0}{\hbar} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \frac{\hbar}{m\omega_0} q^2 \psi$$

e quindi si può riscrivere come

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} + \frac{1}{2} q^2 \psi$$

Cerchiamo soluzioni stazionarie, cioè soluzioni della forma

$$\psi_t(q) = e^{i\omega t} \phi(q)$$

Sostituendo nell'equazione di Schrödinger si arriva all'equazione agli autovalori

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} + \frac{1}{2} q^2 \phi = \omega \phi$$

Ritroviamo con un linguaggio lievemente diverso cose già note. In primo luogo si osservi che

$$\left(q^2 - \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) \phi = \left(q - \frac{\partial}{\partial q} \right) \left(q + \frac{\partial}{\partial q} \right) \phi + \phi$$

In quando sviluppando $(a - b)(a + b)$ a secondo membro i termini misti non si cancellano, ma danno

$$q \frac{\partial \phi}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q}(q\phi) = q \frac{\partial \phi}{\partial q} - \phi \frac{\partial q}{\partial q} - q \frac{\partial \phi}{\partial q} = -\phi$$

L'equazione agli autovalori assume la forma

$$\left(q - \frac{\partial}{\partial q} \right) \left(q + \frac{\partial}{\partial q} \right) \phi + \phi = \omega \phi$$

che è una forma particolarmente utile per risolverla.

A questo punto, capito il gioco dell'analisi dimensionale, possiamo ritornare a notazioni convenzionali e dare alle variabili (q, τ) i vecchi nomi (t, x) e passare dalle derivate storte a quelle dritte visto che ormai lavoriamo con una sola variabile.

Introduciamo l'operatore

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{d}{dx} \right) \left(x + \frac{d}{dx} \right).$$

L'equazione agli autovalori può essere riscritta come

$$\left[\mathfrak{H} + \frac{1}{2} \right] \phi = \omega \phi \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{H} \phi = \left(\omega - \frac{1}{2} \right) \phi$$

Poniamo $\lambda = \omega - 1/2$ e consideriamo l'equazione agli autovalori

$$\mathfrak{H} \phi = \lambda \phi, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \left(x - \frac{d}{dx} \right) \left(x + \frac{d}{dx} \right) \phi = \lambda \phi$$

Si vede che $\lambda = 0$ è autovalore di \mathfrak{H} per autovettore $\phi = \phi_0$ tale che

$$(16) \quad \left(x + \frac{d}{dx} \right) \phi_0 = 0$$

Questa è la stessa equazione che abbiamo incontrato nella lezione 10.1.3 risolvendo l'integrale dell'integrale della gaussiana ($k = x$ e $a = 1/2$) e ha soluzione

$$\phi_0(x) = e^{-x^2/2}$$

(Se si richiede che l'integrale di $\phi_0^2 = \text{cost.}^2 e^{-x^2}$ sia normalizzato a 1, occorre moltiplicare ϕ_0 per la costante $\sqrt[4]{1/\pi}$.)

Abbiamo visto sopra (con la variabile q invece della x) che

$$\left(x - \frac{d}{dx} \right) \left(x + \frac{d}{dx} \right) \phi = \left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \phi - \phi$$

Con passaggi analoghi, si ottiene

$$\left(x + \frac{d}{dx} \right) \left(x - \frac{d}{dx} \right) \phi = \left(x^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \phi + \phi$$

da cui

$$(17) \quad \left(x + \frac{d}{dx}\right) \left(x - \frac{d}{dx}\right) \phi - \left(x - \frac{d}{dx}\right) \left(x + \frac{d}{dx}\right) \phi = 2\phi$$

Adesso mostriamo che

$$(18) \quad \phi_1 = \left(x - \frac{d}{dx}\right) \phi_0$$

è autovettore di \mathfrak{H} con autovalore 1. Si ha

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}\phi_1 &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{d}{dx}\right) \left(x + \frac{d}{dx}\right) \phi_1 \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{d}{dx}\right) \left(x + \frac{d}{dx}\right) \left(x - \frac{d}{dx}\right) \phi_0 \quad \text{per la (18)} \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{d}{dx}\right) \left[\left(x - \frac{d}{dx}\right) \left(x + \frac{d}{dx}\right) \phi_0 + 2\phi_0 \right] \quad \text{per la (17)} \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{d}{dx}\right) 2\phi_0 \quad \text{per la (16)} \\ &= \left(x - \frac{d}{dx}\right) \phi_0 \\ &= \phi_1 \quad \text{per la (18)} \end{aligned}$$

Con lo stesso gioco si può mostrare che

$$(19) \quad \phi_2 = \left(x - \frac{d}{dx}\right) \phi_1 = \left(x - \frac{d}{dx}\right)^2 \phi_0$$

è autovettore di \mathfrak{H} con autovalore 2. Si ha

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}\phi_2 &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{d}{dx}\right) \left(x + \frac{d}{dx}\right) \phi_2 \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{d}{dx}\right) \left(x + \frac{d}{dx}\right) \left(x - \frac{d}{dx}\right) \phi_1 \quad \text{per la (19)} \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{d}{dx}\right) \left[\left(x - \frac{d}{dx}\right) \left(x + \frac{d}{dx}\right) \phi_1 + 2\phi_1 \right] \quad \text{per la (17)} \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{d}{dx}\right) (2\mathfrak{H}\phi_1 + 2\phi_1) \quad \text{per la definizione di } \mathfrak{H} \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{d}{dx}\right) 4\phi_1 \quad \text{perchè } \phi_1 \text{ è autoovettore di } \mathfrak{H} \text{ con autovalore 1} \\ &= 2 \left(x - \frac{d}{dx}\right) \phi_1 \\ &= 2\phi_2 \quad \text{per la (19)} \end{aligned}$$

In maniera analoga si può mostrare che

$$\phi_n(x) = \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2}$$

sono autofunzioni di \mathfrak{H} con autovalore n . Non sono normalizzate. Per avere funzioni il cui quadrato integrato è normalizzato a 1, occorre moltiplicarle per il fattore di normalizzazione

$$c_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt[4]{\frac{1}{\pi}}$$

Le funzioni così ottenute sono usualmente chiamate *funzioni di Hermite*. I polinomi di Hermite (secondo le convenzioni dei fisici) sono definiti dalla relazione

$$\phi_n(x) = c_n H_n(x) e^{-x^2/2}$$

e sono quindi dati dalla formula

$$H_n(x) = e^{x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2}$$

Ecco i primi:

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = 4x^2 - 2, \quad H_3 = 8x^3 - 12x, \quad H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12, \dots$$

Questi polinomi sono anche compattamente riassunti dalla funzione generatrice

$$f_H(x, s) = e^{2xs - s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{s^n}{n!}$$

(basta quindi ricordarsi la funzione generatrice, svilupparla in serie e ottenere così i polinomi di Hermite).

* * *

A questo punto, le seguenti domande sorgono spontanee:

- (1) Le funzioni d'onda costituiscono uno spazio con prodotto scalare?
- (2) In caso affermativo, le funzioni di Hermite formano un sistema ortonormale?
- (3) Sono una base?
- (4) È verificata l'identità di Parseval?
- (5) In caso affermativo, qual è il significato fisico di uno sviluppo di Fourier generalizzato rispetto alla base delle funzioni di Hermite?
- (6) Qual è la soluzione generale dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo per un generico stato iniziale?

Potete incominciare a pensare a come rispondere a queste domande. Le risposte dovrebbero emergere gradualmente nel corso delle prossime lezioni.