

## 14.1. ABC di analisi funzionale II.

14.1.1. **Un altro teorema sulle serie di Fourier.** Nella lezione 13.1.5 si è visto che, fissato un sistema ortonormale  $\{\mathbf{e}_n\}$ , ad un vettore  $\mathbf{u}$  è associata la successione delle sue coordinate (o componenti) di Fourier

$$(1) \quad c_n = \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Questa successione è tale, per la disuguaglianza di Bessel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2,$$

che la serie

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

è convergente.

Consideriamo ora una successione  $c_1, c_2, c_3, \dots$  tale che la serie (2) sia convergente. Esiste un vettore  $\mathbf{u}$  per cui valgono le (1)? La risposta è affermativa ed è data dal seguente teorema (anche noto come teorema di Riesz-Fisher )

**Teorema 1** (Riesz-Fisher). *Sia  $\{\mathbf{e}_n\}$  una base ortonormale in un spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Se  $\{c_n\}$  è una successione di numeri tale che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$  converge, allora esiste allora esiste uno ed un solo vettore  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$  tale che*

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n \quad e \quad c_n = \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle$$

(Si veda la dimostrazione 1 della sezione 14.1.4.)

14.1.2. **Universalità dello spazio di Hilbert delle successioni a quadrato sommabile.** Una conseguenza importante del precedente teorema è che tutti gli spazi di Hilbert infinito dimensionali<sup>1</sup> sono *isometricamente isomorfi* allo spazio  $\ell^2$  delle successioni a quadrato sommabile.

Prima di tutto, chiariamo la terminologia. Due spazi di Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}'$  sono detti isometricamente isomorfi se esiste una corrispondenza biunivoca tra i vettori  $\mathbf{u}$  di  $\mathcal{H}$  e i vettori  $\mathbf{u}'$  di  $\mathcal{H}'$  tale che:

- (1) se a  $\mathbf{u}$  corrisponde  $\mathbf{u}'$  e a  $\mathbf{v}$  corrisponde  $\mathbf{v}'$ , al vettore  $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$  di  $\mathcal{H}$  corrisponde il vettore  $\alpha\mathbf{u}' + \beta\mathbf{v}'$  di  $\mathcal{H}'$  qualunque siano i numeri  $\alpha$  e  $\beta$ ;
- (2) se a  $\mathbf{u}$  corrisponde  $\mathbf{u}'$ , allora

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} = \|\mathbf{u}'\|_{\mathcal{H}'}$$

---

<sup>1</sup>Occorrerebbe aggiungere “separabili”, ma nella lezione precedente abbiamo convenuto di identificare la nozione di spazio di Hilbert con quella di spazio di Hilbert separabile.

Adesso rendiamo esplicito il senso dell'affermazione iniziale. Nella lezione 13 abbiamo mostrato che lo spazio  $\ell^2$  delle successioni a quadrato sommabile è uno spazio di Hilbert infinito-dimensionale. Una sistema ortonormale in  $\ell^2$  è dato dai vettori  $\hat{e}_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  le cui componenti sono tutte 0 eccetto per l' $n$ -esima, che vale 1:

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= (1, 0, 0, 0, \dots) \\ \hat{e}_2 &= (0, 1, 0, 0, \dots) \\ \hat{e}_3 &= (0, 0, 1, 0, \dots) \\ &\dots \quad \dots\end{aligned}$$

Tale sistema è ovviamente chiuso e quindi completo; dunque  $\{\hat{e}_n\}$  è una base ortonormale in  $\ell^2$ . Se  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e  $\{e_n\}$  una base ortonormale in esso, si consideri la corrispondenza

$$\begin{aligned}e_1 &\leftrightarrow \hat{e}_1 \\ e_2 &\leftrightarrow \hat{e}_2 \\ e_3 &\leftrightarrow \hat{e}_3 \\ &\dots \quad \dots\end{aligned}$$

e la si estenda per linearità

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \leftrightarrow \hat{\mathbf{u}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{e}_n = (c_1, c_2, c_3, \dots)$$

Per i teoremi 2 e 3 della lezione 13, a  $\mathbf{u}$  in  $\mathcal{H}$  è associato il vettore

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{e}_n = (c_1, c_2, c_3, \dots)$$

con

$$c_n = \langle e_n | \mathbf{u} \rangle$$

e con identità di Parseval soddisfatta (in quanto una base ortonormale è per definizione un sistema ortonormale completo)

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\ell^2}^2$$

Viceversa, per il teorema 1 di questa lezione, a

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{e}_n = (c_1, c_2, c_3, \dots)$$

in  $\ell^2$  è associato il vettore  $\mathbf{u}$  in  $\mathcal{H}$ . La corrispondenza tra  $\mathcal{H}$  e  $\ell^2$  è dunque biunivoca e isometrica, che è quanto si voleva dimostrare.

L'ovvio corollario è che tutti gli spazi di Hilbert sono isometricamente isomorfi. Questo fatto risulta meno misterioso di quanto sembri se si tiene conto della

seguinte analogia. Lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , astrattamente definito, è l'analogo infinito-dimensionale dello spazio euclideo tri-dimensionale  $E^3$  della geometria elementare. Fissare una base ortormale  $\{\mathbf{e}_n\}$  in  $\mathcal{H}$  è come fissare il sistema di versori  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  in  $E^3$ . Lo spazio  $\ell^2$  è come lo spazio  $\mathbb{R}^3$  delle coordinate  $(x, y, z)$  dei vettori rispetto al sistema di riferimento individuato dai versori  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ . Inoltre, la corrispondenza tra  $\mathcal{H}$  e  $\ell^2$  è analoga alla corrispondenza tra vettori e terne di coordinate,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \leftrightarrow (x, y, z).$$

Infine, l'identità di Parseval è la versione infinito-dimensionale del teorema di Pitagora  $\|\mathbf{r}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

**14.1.3. Lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile e le serie di Fourier.** Ripartiamo dall'inizio della lezione precedente: dallo spazio vettoriale  $C[a, b]$  delle funzioni continue (eventualmente a valori complessi) definite su un intervallo  $[a, b]$ . Allora avevamo introdotto una nozione di lunghezza basata sulla norma uniforme e avevamo stabilito che  $C[a, b]$  è completo rispetto a questa norma.

Adesso vogliamo esplorare una struttura completamente diversa, una struttura costruita sin dall'inizio su un prodotto scalare. Consideriamo la forma

$$(3) \quad \langle f | g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx.$$

definita per coppie di funzioni  $f$  e  $g$  in  $C[a, b]$ . Questa forma definisce un prodotto scalare su  $C[a, b]$  con norma indotta

$$(4) \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f | f \rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

Infatti, si verifica facilmente, per calcolo diretto, che vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|\langle f | g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

da cui segue la disuguaglianza triangolare

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$$

La proprietà della norma  $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2$  è banalmente verificata. Pure la prima proprietà della norma è verificata, infatti

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$$

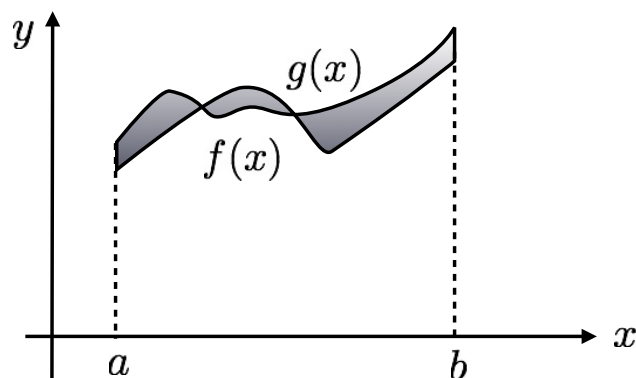
se e solo se  $f = 0$  (si osservi quanto è essenziale che la funzione sia continua). Nel seguito, chiameremo la norma (4) "norma  $L^2$ " e la convergenza nella norma  $L^2$  semplicemente "convergenza  $L^2$ ".

La convergenza  $L^2$  è usualmente anche chiamata convergenza in media quadratica. Se  $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$  è una successione di funzioni, si dice che converge in media quadratica a  $f(x)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ , se

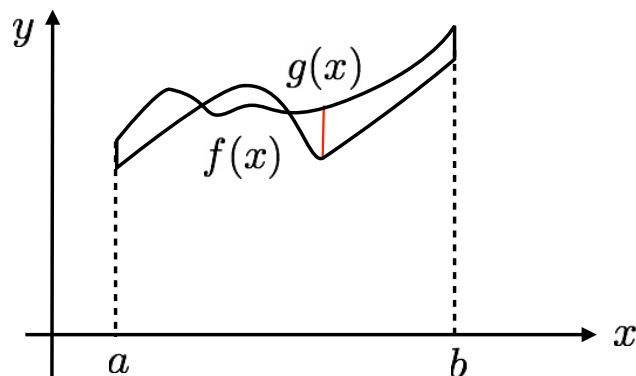
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx = 0,$$

che è proprio la convergenza  $L^2$ .

Da un punto di vista pratico, la convergenza  $L^2$  fornisce una nozione molto utile nelle applicazioni. Come mostrato in figura, la media quadratica stima la distanza tra due funzioni in termini dell'area del quadrato della loro differenza (la zona ombreggiata)



e quindi media le differenze tra le due funzioni su tutto l'intervallo; fornisce, per così dire, una stima globale di quanto due funzioni siano vicine. Al contrario, la convergenza uniforme, e quindi la norma uniforme, è molto più sensibile alle differenze locali in quanto stima la distanza tra le funzioni in termini del massimo della loro differenza (in figura, il segmento in rosso).



La convergenza uniforme è molto più rigida di quella in media quadratica. Dovrebbe essere intuitivamente chiaro che si può avere convergenza in media senza che ci sia convergenza uniforme (ad esempio, può succedere che il massimo della

differenza tra le due funzioni continua a fluttuare senza assestarsi su un valore limite, ma la media quadratica della differenza va a zero).

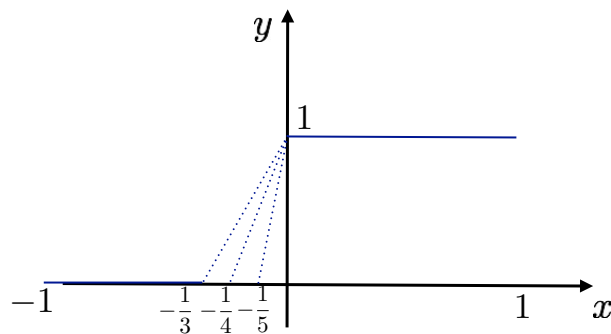
È importante aver chiaro che  $C[a, b]$ , con prodotto scalare (3) e norma  $L^2$ , *non* è completo: è uno spazio pre-hilbertiano, ma *non* uno spazio di Hilbert. Questo si verifica facilmente con un controesempio.

**Esempio 1.** In  $C[-1, 1]$ , sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

e si consideri la successione di funzioni continue

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x \leq -1/n \\ nx + 1 & \text{se } -1/n < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Allora

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x) - f_n(x)|^2 dx} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_{-1/n}^0 (nx + 1)^2 dx} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1/\sqrt{3n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si ha quindi una successione di funzioni continue che nella norma  $L^2$  converge ad un funzione che non è continua.

Essendo  $C[a, b]$  non completo rispetto alla norma  $L^2$ , solo una parte dei risultati ottenuti per gli spazi di Hilbert si estende ad esso. Continua a valere l'analogo del teorema dell'esercizio 1 della lezione 13: se due successioni di funzioni continue  $\{f_n(x)\}$  e  $\{g_n(x)\}$  convergono in media alle funzioni continue  $f(x)$  e  $g(x)$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \overline{f_n(x)g_n(x)} dx = \int_a^b \overline{f(x)g(x)} dx$$

Inoltre, fissato in tale spazio un sistema ortogonale e normale  $\{\varphi_n(x)\}$ , cioè una successione di funzioni tale che

$$\int_a^b \overline{\varphi_n(x)} \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$$

i coefficienti di Fourier della funzione  $f(x) \in C[a, b]$  sono dati dalle formule

$$(5) \quad c_n = \int_a^b \overline{\varphi_n(x)} f(x) dx$$

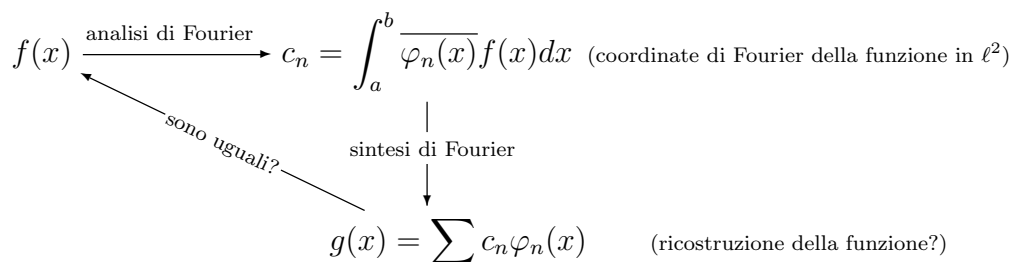
Continua a sussistere il teorema 3 della lezione 13. Un sistema ortogonale completo — una base ortonormale — è un sistema ortogonale per il quale vale l'identità di Parseval: per qualunque funzione continua  $f(x)$ , si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

e si dimostra che sistemi di questo tipo effettivamente esistono (seni e coseni, per esempio, come vedremo nella prossima lezione, o anche le funzioni di Hermite). Non vale invece il teorema 1 di questa lezione, perchè questo teorema presuppone la completezza dello spazio, e lo spazio  $C[a, b]$  non è completo rispetto alla norma  $L^2$ .

Questo significa che non esiste un isomorfismo tra gli elementi di questo spazio e gli elementi di  $\ell^2$ . Più precisamente, fissata in  $C[a, b]$  una base ortonormale  $\{\varphi_n(x)\}$ , mediante le (5), si può associare a ogni funzione continua un elemento di  $\ell^2$ , ma viceversa, fissato un elemento di  $\ell^2$  non si può dire che esiste una funzione continua la cui successione delle coordinate di Fourier (5) coincide con l'elemento fissato di  $\ell^2$ .

La difficoltà a ritornare indietro, cioè a ricostruire la funzione a partire dalle sue coordinate (“sintesi” della funzione) è succintamente espressa dal seguente diagramma:



La risposta alla domanda è: in generale, no!

Per affrontare questo problema si procede come segue. Si è detto che per avere spazi isometricamente isomorfi a  $\ell^2$  occorre considerare spazi di Hilbert, cioè spazi con prodotto scalare completi. Nel nostro caso, ciò si ottiene completando  $C[a, b]$  con la norma  $L^2$ . Analogamente a quel che succede quando si passa dai razionali ai reali, si ottiene in questo modo uno spazio più ampio, lo spazio di tutte le successioni di Cauchy di  $C[a, b]$  rispetto alla norma  $L^2$ .

Questo spazio è usualmente denotato  $L^2(a, b)$  ed è lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile in  $[a, b]$ , cioè delle funzioni  $f$  su  $[a, b]$  tali che

$$(6) \quad \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty .$$

Per costruzione,

- $L^2(a, b)$  è uno spazio di Hilbert,
- $C[a, b]$  è denso in  $L^2(a, b)$ .

A proposito di questo, si possono sollevare due problemi.

- (1) Passando al completamento, inevitabilmente si introducono funzioni discontinue. Ad esempio, la  $f(x)$  dell'esempio 1 è discontinua, ma essendo ottenuta come limite nella norma  $L^2$  di una successione di funzioni continue è in  $L^2(-1, 1)$ . Tuttavia, se si permettono funzioni discontinue nello spazio, allora viene meno la proprietà della norma che stabilisce che la norma è zero se e solo se la funzione è zero. Per convincersi di questo, si considerino le seguenti due funzioni: (i) la funzione che vale zero per tutti i punti di  $[a, b]$  e (ii) la funzione che vale zero eccetto che per un insieme numerabile di punti in  $[a, b]$  dove vale 1. La funzione (ii) ha norma  $L^2$  zero (in quanto l'integrale non vede un insieme numerabile di punti), ma non è (i), la funzione identicamente zero. Esiste una funzione diversa da 0 che ha norma 0.
- (2) La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle f | g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

assicura che il prodotto scalare di  $f$  e  $g$  è ben definito se le norme  $\|f\|_2$  e  $\|g\|_2$  esistono, cioè se  $|f|^2$  e  $|g|^2$  sono integrabili. Tuttavia, l'integrabilità secondo Riemann di  $|f|^2$  e  $|g|^2$  non garantisce l'integrabilità di  $\bar{f}g$ .

Ed ecco due risposte:

- (1) Per risolvere il problema, occorre introdurre la nozione di misura. Rozzamente, si procede così: i sottoinsiemi di  $[a, b]$  a cui è assegnata una misura sono tutti gli insiemi che si costruiscono facendo unioni e intersezioni numerabili di segmenti (ovviamente, segmenti contenuti in  $[a, b]$ ; la misura di un segmento è la sua lunghezza, e la misura di insiemi più complicati costruiti con segmenti è assegnata tenendo conto della proprietà essenziale della misura: *la misura di una collezione di insiemi disgiunti è la somma delle misure degli insiemi*. Fatto questo, si ha una nozione di *insieme di misura nulla*; per esempio, un insieme numerabile di punti ha misura nulla. Adesso la soluzione: propriamente,  $L^2(a, b)$  non va inteso come uno spazio di funzioni, ma come uno spazio di *classi di equivalenza di funzioni*: appartengono alla stessa classe tutte le funzioni che differiscono al più su un insieme di misura nulla. In questo modo, la proprietà di positività della norma viene ristabilita (per le classi di equivalenza di funzioni).

(2) Questo è solo uno dei segnali che la nozione di integrale di Riemann può dare dei problemi per le funzioni che si ottengono passando al completamento in norma  $L^2$  di  $C[a, b]$ . In effetti, la nozione adeguata per esprimere tutti gli integrali che possono intervenire nell'analisi (ad esempio, nel calcolo dei coefficienti di Fourier) è quella di integrale di Lebesgue. Al riguardo due commenti:

- (a) Per gli integrali che incontreremo in questo corso e che si incontrano nella maggior parte delle applicazioni alla fisica (ad esempio, nel calcolo dei coefficienti di Fourier), l'integrale di Riemann è sufficiente.
- (b) Lo studio della teoria della misura e dell'integrazione di Lebesgue non è difficile, ma richiede del tempo (almeno 10 ore di lezione per una presentazione "veloce"). In ogni caso, esula dal programma di questo corso.

A questo punto, in  $L^2$ , la situazione illustrata precedentemente diventa

$$\begin{array}{ccc}
 f(x) & \xrightarrow{\text{analisi di Fourier}} & c_n = \int \overline{\varphi_n(x)} f(x) dx \quad (\text{coordinate di Fourier della funzione in } \ell^2) \\
 & \swarrow \text{sono uguali!} & \downarrow \text{sintesi di Fourier} \\
 & & g(x) = \sum c_n \varphi_n(x) \quad (\text{ricostruzione della funzione in } L^2)
 \end{array}$$

Naturalmente, l'uguaglianza va intesa nel senso  $L^2$ , cioè a meno di un insieme di misura nulla.

#### 14.1.4. Dimostrazioni.

**Dimostrazione 1** (Riesz-Fisher). Per  $\{e_n\}$  fissato, vogliamo dimostrare che se  $\{c_n\}$  è una successione di numeri tale che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$  converge, allora esiste uno ed un solo vettore  $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$  tale che  $\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$  e

$$(7) \quad c_n = \langle e_n | \mathbf{u} \rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Incominciamo col dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

è convergente. Infatti, posto

$$\mathbf{s}_n = \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

si ha per  $n > m$

$$\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^n c_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^n |c_i|^2$$



Poiché la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$  converge per ipotesi, ne segue che

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\|^2 = 0$$

e quindi, essendo lo spazio di Hilbert completo (ogni successione di Cauchy converge ad un elemento dello spazio), esiste un vettore  $\mathbf{u}$  nello spazio di Hilbert tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{s}_n = \mathbf{u}$ , cioè

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n$$

Il vettore  $\mathbf{u}$  ora trovato, a causa del teorema 2 della lezione 13, soddisfa le (7). Si osservi che nell'ottenere questo risultato non abbiamo sfruttato la completezza del sistema ortonormale  $\{\mathbf{e}_n\}$ . Se adesso assumiamo che  $\{\mathbf{e}_n\}$  sia completo, e quindi chiuso, è facile mostrare che il vettore  $\mathbf{u}$  trovato deve essere unico. Infatti, se esistessero due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}'$  che soddisfano le (7), allora

$$\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}' | \mathbf{e}_n \rangle = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ed essendo il sistema chiuso deve essere  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ .