

15.1. ABC di analisi funzionale III.

15.1.1. Spazi ortogonali e teorema di proiezione per uno spazio di Hilbert.

Definizione 1. Un sottospazio \mathcal{M} di \mathcal{H} è detto chiuso se è un sottospazio vettoriale completo nella norma, cioè tale che se $\{\mathbf{u}_n\}$ è una successione convergente di elementi di \mathcal{M} , anche il suo limite in norma è in \mathcal{M} . In altre parole,

$$\text{se } \mathbf{u}_n \in \mathcal{M} \text{ e } \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n\| \rightarrow 0 \text{ allora } \mathbf{u} \in \mathcal{M}$$

Dunque, un sottospazio chiuso è, esso stesso, uno spazio di Hilbert.

Definizione 2. Due elementi di uno spazio con prodotto scalare sono detto ortogonali, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, se $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 0$

Teorema 1. Il complemento ortogonale

$$\mathcal{M}^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathcal{H} \text{ tale che } \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \text{ per qualunque } \mathbf{v} \in \mathcal{M}\}$$

di un qualunque sottoinsieme \mathcal{M} di \mathcal{H} è un sottospazio chiuso.

Teorema 2 (della proiezione). Se \mathcal{M} è un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , allora ciascun $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$ può essere unicamente rappresentato come

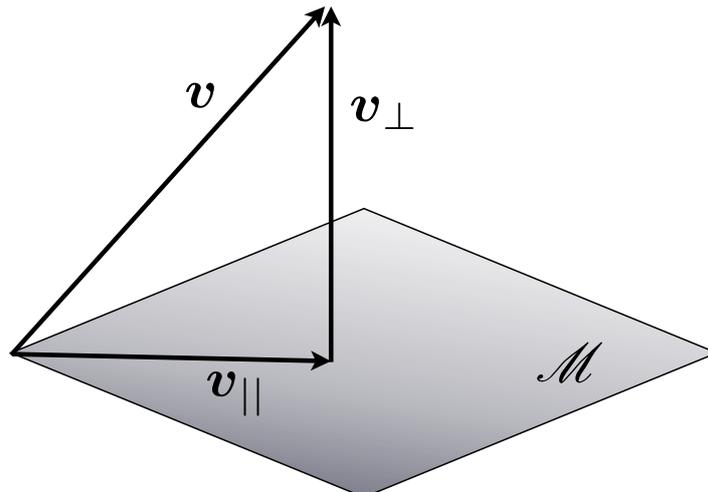
$$(1) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_\perp$$

dove $\mathbf{v}_{||} \in \mathcal{M}$ e $\mathbf{v}_\perp \in \mathcal{M}^\perp$. Inoltre, $\mathbf{v}_{||}$ (che è chiamato la proiezione di \mathbf{v} su \mathcal{M}) soddisfa

$$(2) \quad \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{||}\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$

per qualunque altro elemento $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$

Il contenuto del teorema è simbolicamente espresso dalla seguente figura



Questo fatto è geometricamente ovvio in uno spazio euclideo, sia per quel che riguarda la (1) sia per la (2), che esprime il fatto che la distanza minima tra il punto Q individuato da \mathbf{v} e il sottospazio \mathcal{M} è quella che si percorre partendo da Q e muovendosi nella direzione ortogonale a \mathcal{M} . La cosa interessante è che questo teorema è vero, pari pari in uno spazio di Hilbert qualunque. Non ne daremo la dimostrazione generale, ma, nel seguito, in un caso particolare.

Dato \mathcal{M} , l'operatore P che proietta un qualunque vettore \mathbf{v} nel vettore \mathbf{v}_{\parallel} ,

$$P\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel},$$

è chiamato proiettore ortogonale di \mathcal{H} su \mathcal{M} . Soddisfa le ovvie proprietà geometriche di una proiezione ortogonale, in particolare è idempotente

$$P^2 = P.$$

Inoltre è continuo: se $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\| \rightarrow 0$, allora $\|P(\mathbf{u}_n) - P(\mathbf{u})\| \rightarrow 0$. Si osservi che il proiettore su \mathcal{M}^{\perp} è $I - P$, dove I è l'operatore identità.

Il teorema della proiezione garantisce l'unicità della decomposizione di \mathcal{H} in somma ortogonale di un suo sottospazio chiuso \mathcal{M} e del suo complemento ortogonale \mathcal{M}^{\perp} . Per esprimere questo fatto, di solito si scrive

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$$

15.1.2. **Approssimazione in media quadratica.** Sia $\{\mathbf{e}_n\}$ una base ortonormale in \mathcal{H} , si fissi un numero N (ad esempio $N = 10$) e si consideri l'insieme di tutti i vettori

$$(3) \quad \sum_{n=1}^N z_n \mathbf{e}_n$$

per tutte le successioni (z_1, z_2, \dots, z_N) di numeri complessi. L'insieme \mathcal{M} così ottenuto è un sottospazio finito-dimensionale di \mathcal{H} (e quindi chiuso), di dimensione N (e quindi isometricamente isomorfo a \mathbb{C}^N).

Sia \mathbf{u} un qualunque vettore di \mathcal{H} . Si osservi che in notazione di Dirac, l'operatore di proiezione P su \mathcal{M} può essere espresso come

$$P = \sum_{n=1}^N |\mathbf{e}_n\rangle\langle\mathbf{e}_n|.$$

Infatti la proiezione ortogonale di \mathbf{u} su \mathcal{M} è

$$P\mathbf{u} = \sum_{n=1}^N |\mathbf{e}_n\rangle\langle\mathbf{e}_n|\mathbf{u}\rangle$$

Adesso ci domandiamo quale sia il vettore in \mathcal{M} che meglio approssima \mathbf{u} . Per rispondere a questa domanda usiamo il metodo dei minimi quadrati. Consideriamo

la norma al quadrato della differenza tra \mathbf{u} e un generico vettore di \mathcal{M} , cioè un vettore del tipo (3),

$$\left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N z_n \mathbf{e}_n \right\|^2$$

e determiniamo quali siano i valori dei coefficienti z_n tale che la differenza sia minima. Detta f la differenza,

$$\begin{aligned} f = f(z_1, \dots, z_N, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N) &= \left\| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N z_n \mathbf{e}_n \right\|^2 = \left\langle \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N z_n \mathbf{e}_n \left| \mathbf{u} - \sum_{n=1}^N z_n \mathbf{e}_n \right. \right\rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{n=1}^N \bar{z}_n \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle - \sum_{n=1}^N z_n \langle \mathbf{u} | \mathbf{e}_n \rangle + \sum_{n=1}^N |z_n|^2 \end{aligned}$$

Il minimo (se esiste) è in corrispondenza dell'annullarsi delle derivate prime $\partial f / \partial z_k = 0$ e $\partial f / \partial \bar{z}_k = 0$ (trattando le z e le \bar{z} come variabili indipendenti). Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_k} = -\langle \mathbf{u} | \mathbf{e}_k \rangle + \bar{z}_k = 0 &\Rightarrow \bar{z}_k = \langle \mathbf{u} | \mathbf{e}_k \rangle \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = -\langle \mathbf{e}_k | \mathbf{u} \rangle + z_k = 0 &\Rightarrow z_k = \langle \mathbf{e}_k | \mathbf{u} \rangle \end{aligned}$$

Si può verificare che per i valori così ottenuti si ha davvero un minimo e non un massimo o un punto sella (esercizio a casa). Il vettore in \mathcal{M} a distanza minima da \mathbf{u} è proprio

$$P\mathbf{u} = \sum_{n=1}^N |\mathbf{e}_n\rangle \langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle$$

in accordo con (2). La miglior approssimazione di un vettore in uno spazio più piccolo di quello in cui vive il vettore è dunque la proiezione del vettore stesso in quel sottospazio!

Ogni qual volta confrontiamo le nostre teorie con l'esperienza, o facciamo simulazioni al computer, siamo sempre costretti a lavorare con spazi piccoli, cioè finiti, anche se le nostre teorie fisiche sono formulate in spazi infiniti. Non dovrebbe quindi sorprendere che il teorema della proiezione sia alla base di molti metodi di approssimazione che si utilizzano in fisica e nelle scienze applicate.

15.1.3. *Due note alla lezione precedente.*

- (1) Nella lezione 14 abbiamo introdotto il simbolo $L^2(a, b)$ per denotare lo spazio delle funzioni $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tali che $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$. Ma poiché questo integrale non è modificato dalla sostituzione dell'intervallo chiuso $[a, b]$ con quello aperto (a, b) o con i semiaperti $(a, b]$ e $[a, b)$, $L^2(a, b)$ coincide con $L^2[a, b]$, $L^2(a, b]$ e $L^2[a, b)$. Inoltre, non è richiesto che l'intervallo (a, b) sia limitato da una parte, dall'altra o da entrambe, e così abbiamo $L^2(a, \infty)$,

$L^2(-\infty, b)$ e $L^2(-\infty, \infty) = L^2(\mathbb{R})$. In questi casi, così come nel caso in cui la funzione è illimitata, interpretiamo l'integrale di $|f|^2$ come un integrale improprio di Riemann. talvolta scriveremo semplicemente L^2 quando l'intervallo sottostante non è specificato o quando è irrilevante specificarlo per la discussione.

- (2) Nella lezione 14 abbiamo detto che la convergenza nella norma uniforme delle funzioni continue è più rigida di quella L^2 . In effetti, si tratta di un teorema che si dimostra facilmente (esercizio) e che d'ora in avanti daremo per scontato: *se f_n è una successione di funzioni continue che converge a f nella norma uniforme di $C[a, b]$, allora converge a f anche nella norma L_2 .*