

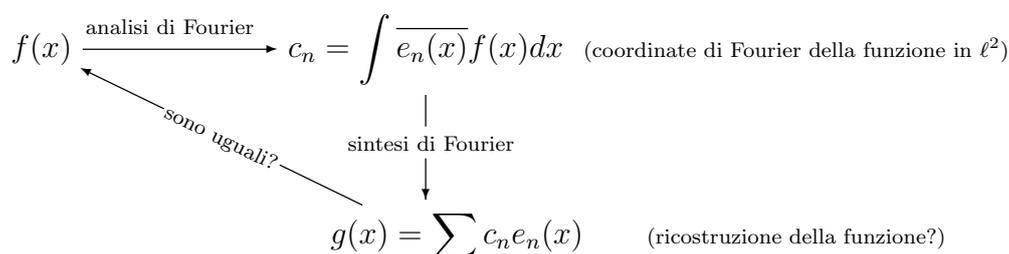
## 15.2. Analisi di Fourier I.

15.2.1. **Analisi di Fourier classica.** Le regole del gioco sono tutto sommato abbastanza semplici: dato un sistema ortogonale di funzioni  $\{e_n(x)\}$  e  $f \in L^2$  vogliamo trovare lo sviluppo di Fourier di  $f$ , vale a dire

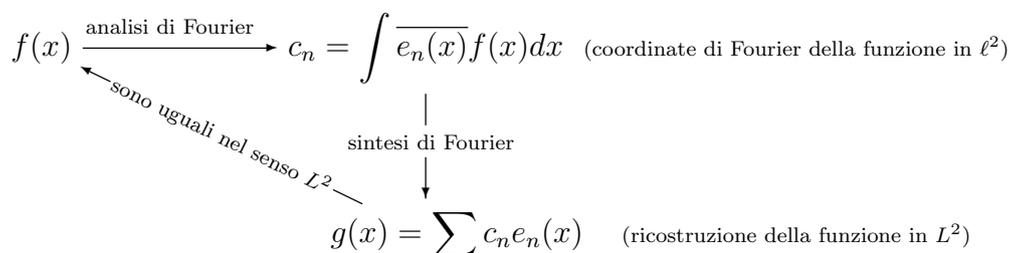
$$(1) \quad f(x) = \sum c_n e_n(x)$$

$$(2) \quad c_n = \int \overline{e_n(x)} f(x) dx$$

Occorre prestare attenzione al senso di uguaglianza nella (1). Riprendiamo il diagramma della lezione precedente



Se  $f(x)$  è una funzione continua, non abbiamo alcuna ragione di ritenere che  $g(x)$  sia continua, per non dire uguale a  $f(x)$ . Tuttavia, se ci accontentiamo di meno, cioè di un'uguaglianza in senso  $L^2$  (cioè a meno di un insieme di misura nulla), la situazione diventa più abbordabile. Alla fine della lezione dimostreremo che, per il sistema ortogonale originariamente considerato da Fourier, vale quanto espresso dal diagramma:



Dimostrato questo, la teoria generale degli spazi di Hilbert garantisce isomorfismo isometrico tra  $L^2$  e  $\ell^2$ , in particolare la l'uguaglianza nel senso  $L^2$  tra la funzione "sintetizzata" e la funzione originale.

Prima però, chiariamo alcuni aspetti dell'analisi di Fourier classica.

*Sistema trigonometrico.* Quanto visto nelle lezioni precedenti si applica ad un sistema ortogonale di funzioni generico. Adesso ci occuperemo del sistema ortormale classico di Fourier in  $L^2[-\pi, \pi]$ , che è

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 3x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

D'ora in avanti, a meno che non sia direttamente esplicitato, per analisi di Fourier, intendere quella classica, basata su seni e coseni. L'ortonormalità si verifica facilmente (esercizio), e della completezza ce ne occuperemo tra breve.

*Convenzione sul prodotto scalare.* Il coefficiente (o coordinata) di Fourier di  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  è di solito denotato con  $c_0$  e i coefficienti dei coseni e dei seni con  $a_n$  e  $b_n$  rispettivamente, vale a dire,

$$(4) \quad c'_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$(5) \quad a'_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$(6) \quad b'_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

La ragione per cui abbiamo messo un apice risulta presto spiegata: le formule precedenti non sono quelle che si trovano in molti testi, dove non c'è a secondo membro una radice a denominatore. La ragione di questa apparente incongruenza è che ci sono diverse convenzioni sul prodotto scalare. Una possibilità diversa dalla precedente è di assorbire la normalizzazione a  $2\pi$  nell'elemento infinitesimo di lunghezza e di considerare il prodotto scalare

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$$

Lo spazio di Hilbert così ottenuto, di solito, lo si denota  $L^2([\pi, \pi], \frac{dx}{2\pi})$  o  $L^2(\frac{dx}{2\pi})$ , essendo sottinteso l'intervallo  $[-\pi, \pi]$ ; un'altra notazione comune per i matematici è  $L^2(\mathbb{T})$  (nel seguito useremo questa). Adesso, in  $L^2(\mathbb{T})$ , le funzioni

$$(7) \quad 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots$$

formano un sistema ortonormale. Allora, in  $L^2(\mathbb{T})$ , le (4,5,6) diventano

$$(8) \quad c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$(9) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$(10) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Nel seguito useremo questa convenzione per il prodotto scalare e lavoreremo nello spazio  $L^2(\mathbb{T})$ .

*Forma esponenziale.* Con le notazioni adottate, lo sviluppo (1) risulta

$$(11) \quad f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] .$$

È comune esprimere le serie di Fourier in una forma algebrica più semplice in termini di esponenziali complessi. Se usiamo le formule di Eulero per seno e coseno, possiamo riscrivere il secondo membro della (11) come

$$\begin{aligned} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right] \\ &= c_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - ib_n)e^{inx} + (a_n + ib_n)e^{-inx}] \end{aligned}$$

Se poniamo

$$2c_n = a_n - ib_n$$

il secondo membro della (11) diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_n e^{-inx}$$

Se infine definiamo

$$c_{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{c}_n$$

arriviamo alla scrittura elegante e compatta

$$(12) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}$$

*Sviluppo con periodicità diversa da  $2\pi$ .* Se la periodicità in  $x$  della funzione è  $L$ , basterà operare sulla  $x$  un cambio di scala passando ad una variabile  $y$  in modo che ad un intervallo di lunghezza  $L$  della  $x$  corrisponda un intervallo di lunghezza  $2\pi$  della  $y$ . Poniamo quindi

$$x = \frac{L}{2\pi} y$$

e otterremo

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{2\pi} y\right) e^{-iny} dy = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i(2\pi/L)nx} dx$$

*Esempi.* Le serie di Fourier sono tipicamente usate per analizzare funzioni (segnali) periodici. In altre parole, la funzione che si vuole analizzare è tipicamente una funzione sulla retta reale, periodica di periodo  $2\pi$  (con un cambiamento di scala, un periodo  $L$  può essere reso uguale a  $2\pi$ ). Il confronto va quindi fatto tra la funzione e il prolungamento periodico dello sviluppo (11) o (12) a sinistra di  $-\pi$  e a destra di  $\pi$ . Incominciamo con un paio di esempi.

Primo. Sia  $f_1(x)$  definita su  $[-\pi, \pi]$  come

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \pi/2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e sia poi estesa per periodicità  $2\pi$  a tutta la retta reale. È di solito chiamata onda quadra. La costante  $c_0$  è

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx = \frac{1}{2}$$

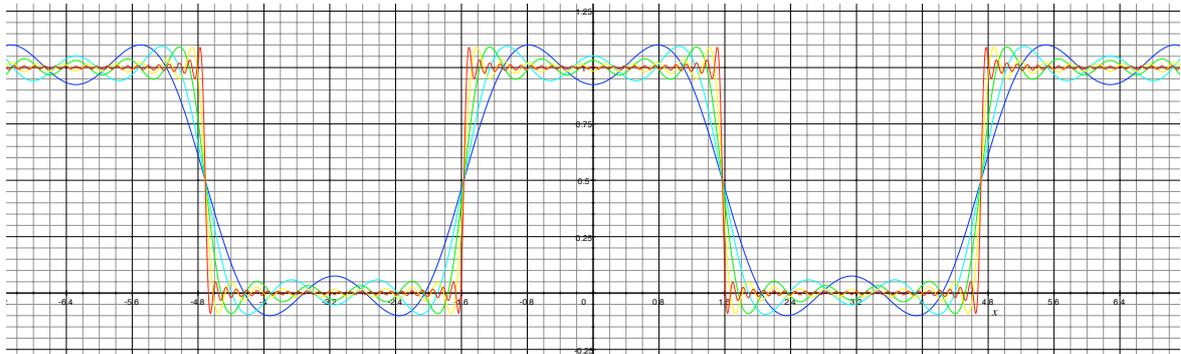
Mentre per  $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-in\pi/2} - e^{in\pi/2}}{-in} = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}.$$

Perciò la serie di Fourier dell'onda quadra è

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} (e^{inx} + e^{-inx}) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(n\pi/2)}{n\pi} \cos nx$$

In figura sono mostrate le approssimazioni per  $n = 3, 5, 10, 20, 50$ .



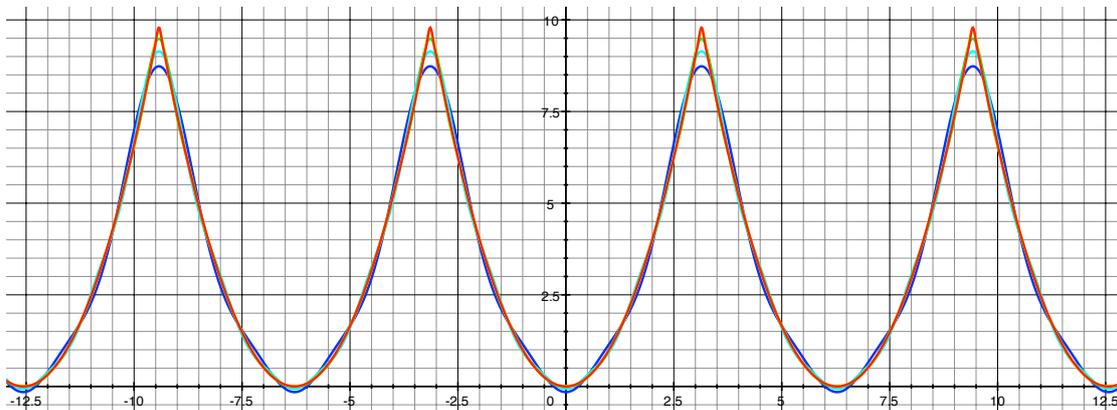
Secondo. Sia  $f_2(x) = x^2$  in  $[-\pi, \pi]$  e abbia periodo  $2\pi$  sulla retta reale. Potremo chiamarla “onda parabolica”. L’onda parabolica ha  $c_0 = \pi^2/3$  e  $c_n$  per  $n \neq 0$  si ha

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} x^2(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2(-1)^n}{n^2}.$$

dopo un'integrazione per parti. La serie di Fourier di questa funzione è allora

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

In figura sono mostrate le approssimazioni per  $n = 3, 5, 10, 20, 50$ .



Si osservi che le approssimazioni sono migliori in questo secondo caso (perché?).

*Analisi in frequenza.* L'analisi di Fourier è sovente interpretata come un'analisi in frequenza. Discutiamo brevemente che cosa si intende con questo. Un esponenziale complesso  $e^{inx}$  è un'onda elementare di periodo (più piccolo)  $2\pi/n$  e quindi di frequenza  $n/2\pi$ . L'integrale che definisce il coefficiente  $c_n$  è il prodotto scalare tra la funzione  $f$  e  $e^{inx}$ , ed è dunque una misura di quanta parte dell'onda elementare di frequenza  $n/2\pi$  è contenuta in  $f$ . Perciò, l'intera collezione di questi integrali, al variare di  $n$  tra tutti gli interi — cioè la collezione di tutti i coefficienti  $c_n$  — specifica il contenuto di frequenza di  $f$  sull'insieme di tutte le frequenze  $n/2\pi$ , con  $n = -\infty, \dots, \infty$ . Se la serie converge a  $f$  allora

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

e quindi  $f$  risulta espressa come una sovrapposizione di onde elementari  $c_n e^{inx}$  di frequenza  $n/2\pi$  e ampiezza  $c_n$ , indipendenti tra loro perché ortogonali.

**15.2.2. Serie di Fourier = Serie di Laurent.** Per una classe di funzioni, l'identità

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

è puntuale e lo sviluppo di Fourier risulta completamente motivato da un'argomentazione diversa da quella di decomposizione di una funzione, vista come un vettore, nelle sue coordinate rispetto ad una base ortonormale. Per funzioni analitiche, lo sviluppo di Fourier non è nient'altro che lo sviluppo di Laurent!

Per mostrare questo incominciamo con una definizione

**Definizione 1.** Diciamo che una funzione analitica  $f(z)$  definita nella striscia  $\{z : |Imz| < a, a > 0\}$  ha periodicit   $2\pi$  se per tutti gli  $z$  nella striscia si ha  $f(z + 2\pi) = f(z)$ .

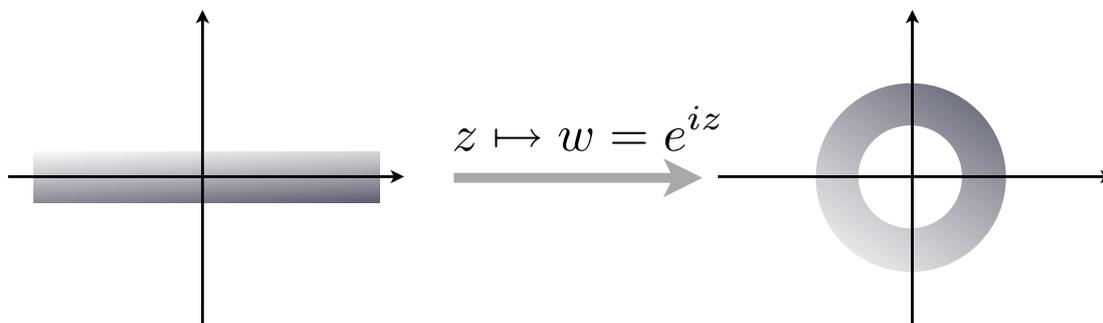
**Esempi di funzioni analitiche periodiche.** Le funzioni elementari  $\sin nz$ ,  $\cos nz$  e  $e^{\pm inz}$  sono i mattoni di base. Anche funzioni nonlineare, per esempio

$$\frac{1}{1 + \sin^2 z}$$

  analitica in qualunque striscia in cui  $\sin z \neq \pm i$ . Una funzione intera  $h = \sum_0^\infty a_n z^n$  fornisce l'esempio

$$h(e^{iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx}$$

Un'analisi collegata a quest'ultimo caso fornisce la teoria generale. Si consideri la trasformazione



che trasforma la striscia nell'anello  $\{w : e^{-a} < |w| < e^a\}$ . Questa trasformazione avvolge l'asse reale infinite volte attorno al cerchio unitario nel piano  $w$ . Le preimmagini dei punti  $w = e^{i\theta}$  sono i punti  $z = \theta + 2\pi n$ . Non   difficile convincersi che c'  una corrispondenza uno-a-uno tra funzioni analitiche sull'anello e funzioni analitiche periodiche nella striscia attorno all'asse reale data da

$$f(z) = g(e^{iz}).$$

Si quindi il teorema

**Teorema 1.** Se  $f(z)$    una funzione analitica periodica di periodo  $2\pi$  nella striscia  $\{z : |Imz| < a, a > 0\}$ , allora ha una rappresentazione di Fourier

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inz}$$

uniformemente convergente in ciascuna striscia sempre pi  piccola. I coefficienti sono dati dalla formula

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

Per dimostrare questo, si usi lo sviluppo di Laurent

$$g(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{g(w)}{w^{n+1}} dw$$

uniformemente convergente in ciascun sub-anello. Poichè  $f(z) = g(e^{iz})$ , si ha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (e^{iz})^n$$

e

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{i\theta})}{w^{n+1}} i w d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{i\theta})}{e^{i(n+1)\theta}} e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

□

### 15.2.3. Completezza del sistema trigonometrico.

**Teorema 2** (Completezza del sistema trigonometrico). *Se  $f$  è in  $L^2(\mathbb{T})$ , allora, per*

$$e_n(x) = e^{inx}, \quad c_n = \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

si ha

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n$$

nel senso che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N(f)\|^2 = 0, \quad \text{dove} \quad S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n e_n$$

Dimostrazione. Sia

$$g = \sum c_n e_n$$

(la funzione che nel diagramma all'inizio della lezione abbiamo chiamato la sintesi di Fourier). Se dimostriamo che  $f$  e  $g$  sono uguali, la completezza del sistema trigonometrico risulta dimostrata e l'analisi di Fourier nelle componenti  $c_n$  diventa una rappresentazione isomorfa e isometrica di  $L^2$  in  $\ell^2$ .

Dimostriamo che  $f$  e  $g$  sono effettivamente uguali. A tal fine, ripesciamo dalla lezione 12.3 il nucleo di Poisson ("ripescare" sembra appropriato per Poisson) e il teorema principale di convergenza uniforme che risolve il problema di Dirichlet per il disco unitario. Tale teorema afferma che se  $f$  è una funzione continua su  $\mathbb{T}$

$$u_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x - \theta) f(\theta) d\theta$$

converge *uniformemente* a  $f$  quando  $r$  tende a 1. Il nucleo di Poisson  $P_r(x)$  è dato da

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(x) + r^2}.$$

Esercizio (facile) da fare a casa:

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$

(prendete la formula che esprime il nucleo di Poisson come parte reale di una funzione analitica e sviluppatela in serie).

Allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x - \theta) f(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(x-\theta)} f(\theta) d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} d\theta \right] r^{|n|} e^{inx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx} \end{aligned}$$

converge uniformemente a  $f$  per  $r \uparrow 1$ . Questo significa che la distanza nella norma uniforme tra  $f$  e

$$u_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$$

può essere resa arbitrariamente piccola scegliendo  $r < 1$ . Ma allora anche la loro distanza nella norma  $L^2$  può essere resa arbitrariamente piccola.

Poiché  $g$  è la proiezione ortogonale di  $f$  nello spazio generato dai  $\{e^{inx}\}$ , la funzione  $g$  è la migliore approssimazione di  $f$  in quello spazio. Ma

$$u_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$$

è in quello spazio e quindi se la sua distanza  $L^2$  da  $f$  può essere resa arbitrariamente piccola, a maggior ragione, anche la distanza tra  $f$  e  $g$  potrà essere resa tale. Dunque

$$f = g$$

In conclusione, il sistema ortonormale  $\{e^{inx}\}$  è completo e quindi vale la disuguaglianza di Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Il teorema è stato dimostrato per  $f$  continua, ma, essendo le funzioni continue dense in  $L^2$ , la dimostrazione si estende facilmente per continuità a qualunque funzione in  $L^2$ .

**15.2.4. Un'altra dimostrazione della completezza del sistema trigonometrico.** Diamo un'altra dimostrazione del del teorema 2.

Come nella dimostrazione precedente, gli ingredienti cruciali sono:

- (1) Per il nucleo di Poisson  $P_r$  si ha  $P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$  (prima è stato lasciato come esercizio e tra poco si darà la risposta).
- (2)  $f(x)$  è una funzione continua. Allora

$$u_r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x - \theta) f(\theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$$

converge uniformemente a  $f(x)$  quando  $r$  tende a 1. (Questo è il risultato più importante della lezione 12.3. Si rileggano attentamente le note di quella lezione prima di continuare a leggere queste.)

- (3) Sia

$$S_N(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}, \quad c_n = \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

la proiezione ortogonale di  $f$  sullo span  $\mathcal{M}_N$  dei vettori  $\{e^{inx}\}_{n=-N}^N$  (Si leggano le note della lezione 15.1).

Adesso procediamo con la dimostrazione.

**1.** Dimostriamo che vale lo sviluppo in serie del nucleo di Poisson. Nella lezione 12.3 si era visto che per  $z = re^{it} \in \mathbb{D}$  ( $r < 1$ ) e  $Z = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$  si ha

$$\frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \theta) + r^2} = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right).$$

Calcoliamo la parte reale a secondo membro

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) &= \operatorname{Re} \left( 1 + 2 \frac{z}{e^{i\theta} - z} \right) \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{z}{e^{i\theta} - z} \right) \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{(ze^{-i\theta})}{1 - (ze^{-i\theta})} \right] \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (ze^{-i\theta})^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x - \theta) f(\theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$$

che è quanto si voleva dimostrare.  $\square$

**2.** Adesso sia

$$\mathcal{S}_N^{(r)}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-N}^N c_n r^{|n|} e^{inx}$$

Se  $u_r$  converge uniformemente a  $f$  quando  $r$  tende a 1, allora per ogni  $\epsilon$  esiste un  $r < 1$  e un intero  $M$  tali che per  $N \geq M$  si ha

$$\sup_{x \in \mathbb{T}} |f(x) - \mathcal{S}_N^{(r)}(f)(x)| < \epsilon.$$

Questo implica che

$$\left\| f - \mathcal{S}_N^{(r)}(f) \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \mathcal{S}_N^{(r)}(f)(x)|^2 dx < \epsilon^2$$

e quindi che

$$\left\| f - \mathcal{S}_N^{(r)}(f) \right\|_2 < \epsilon$$

Per il teorema della proiezione ortogonale della lezione 15.1 (in particolare per quanto esplicitamente calcolato nella lezione 15.1.2 “Approssimazione in media quadratica”), la proiezione di  $f$  sullo span  $\mathcal{M}_N$  dei vettori  $\{e^{inx}\}_{n=-N}^N$  è il vettore in  $\mathcal{M}_N$  più vicino a  $f$ . La funzione  $\mathcal{S}_N^{(r)}$ , che è anch’essa in  $\mathcal{M}_N$ , dovrà dunque essere più lontana da  $f$ . Allora si ha

$$\|f - S_N(f)\|_2 \leq \left\| f - \mathcal{S}_N^{(r)}(f) \right\|_2 < \epsilon$$

per tutti gli  $N \geq M$ . Per il metodo del confronto dei limiti, ne segue che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0,$$

per  $f$  funzione continua, che è proprio quanto si voleva dimostrare.  $\square$

**15.2.5. Serie di Taylor, serie di Laurent e serie di Fourier.** Concludiamo questa lezione con alcune osservazioni e commenti mirati a chiarire il legame tra serie di Fourier e serie di Laurent e il ruolo giocato dal nucleo di Poisson nella dimostrazione del teorema 2. Lo scopo è mostrare come questo legame sia molto più naturale di quanto possa apparire a prima vista. Parte di questi commenti sono stati fatti a lezione, ma non sono stati scritti nella prima stesura, parte sono nuovi e verranno ripresi in classe nella prossima lezione.

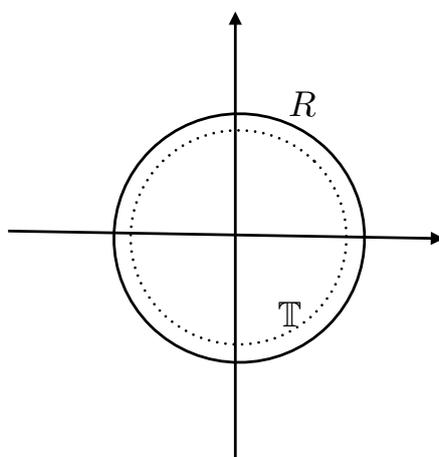
Fin che si resta nel campo delle variabili reali, le serie di Fourier si distinguono nettamente dalle serie di Taylor. Infatti, per determinare i coefficienti di uno sviluppo di Taylor occorre conoscere i valori assunti dalla funzione e da tutte le sue derivate in un solo punto. Ciò significa che, nel suo intervallo di convergenza, la

serie di Taylor definisce una funzione che è determinata solamente dal suo andamento in un intorno comunque piccolo di un unico punto — il punto di espansione delle serie. La funzione così definita è una struttura rigida e inalterabile, nel senso che nessun sviluppo di Taylor è in grado di rappresentare una funzione che sia identica ad una data serie di Taylor in una parte dell'intervallo di convergenza e diversa in un'altra parte. Le funzioni definite da serie di Taylor costituiscono una classe importante di funzioni, ma sono evidentemente una classe molto ristretta fra tutte le funzioni pensabili.

Al contrario, per conoscere lo sviluppo di Fourier associato a una funzione data è necessario conoscere l'andamento globale di questa funzione in tutto l'intervallo che ne definisce il periodo. Purché la funzione soddisfi le condizioni che abbiamo studiato in questa lezione, è possibile trovare la serie di Fourier che la rappresenti. L'andamento della funzione, inoltre, può essere modificato abbastanza arbitrariamente in intervalli finiti, senza che per questo la funzione cessi di essere sviluppabile in serie di Fourier.

Se si resta nel campo reale, le serie di Fourier sembrano dunque definire una classe di funzioni più vasta di quelle definibili mediante serie di Taylor. Ma la distinzione scompare quando si passa al piano complesso. Ci sono tre situazioni in cui si vede emergere una relazione naturale tra serie di Taylor e serie di Fourier. Incominciamo con la più semplice.

1. Consideriamo la funzione  $w = f(z)$  definita da uno sviluppo in serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  nell'origine, e avente un raggio di convergenza  $R > 1$  (se si sceglie una funzione con  $R < 1$ , si riscali la  $z$  in modo da avere  $R > 1$ ).



Consideriamo ora  $f(z)$  per  $z \in \mathbb{T}$ , il cerchio di raggio 1. Detto  $\theta$  l'argomento di  $z$ , per cui  $z = e^{i\theta}$ , si avrà

$$f(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

Per la formula di Cauchy,

$$c_n = \frac{f^n(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|Z|=1} \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

Risulta così stabilita una relazione immediata tra serie di Taylor e serie di Fourier.

Possiamo rendere questa relazione ancora più trasparente. Dette  $u$  e  $v$  rispettivamente le parte reale e la parte immaginaria di  $w$ , possiamo scrivere

$$w = u + iv = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

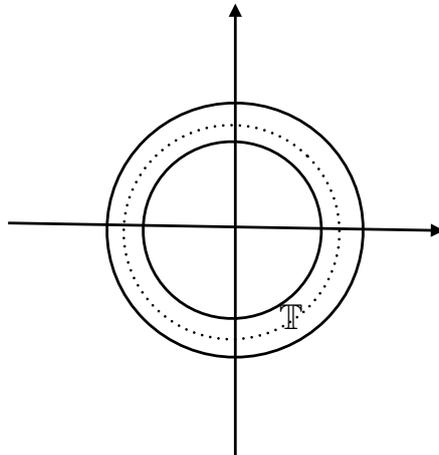
Ora è sufficiente chiamare  $a_n$  la parte reale di  $c_n$  e  $-b_n$  la sua parte immaginaria, e separare, nella precedente uguaglianza, la parte reale e la parte immaginaria, per ottenere due sviluppi di Fourier

$$\begin{cases} u(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta] \\ v(\theta) = -b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta] \end{cases}$$

Da ogni serie di Taylor considerata nel piano complesso è dunque possibile dedurre due serie di Fourier; viceversa, data una serie di Fourier e quindi noti i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  è possibile, procedendo a ritroso, determinare le costanti  $B_n$  e pertanto la corrispondente serie di Taylor. Risulta così dimostrato che se la serie di di Fourier converge, anche la corrispondente serie di Taylor converge (e la convergenza è uniforme, visto che  $\mathbb{T}$  è dentro al disco di convergenza di raggio  $R > 1$ ).

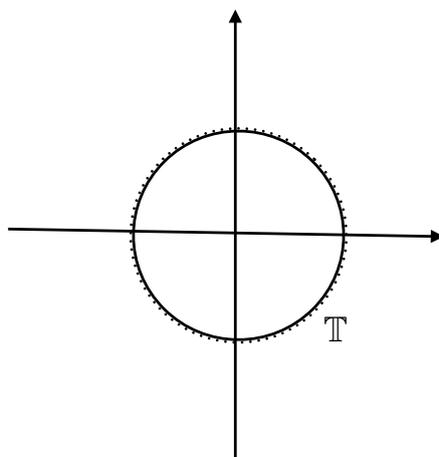
Non c'è contraddizione tra il nesso ora trovato e l'apparente diversità degli sviluppi nel campo reale. Quando abbiamo appena detto ci insegna soltanto che l'arbitrarietà concessa alla serie di Fourier su  $\mathbb{T}$ , si "concentra" per così dire, in un intorno piccolo a piacere del centro del cerchio stesso, quando si passa alle corrispondenti serie di potenze.

**2.** Consideriamo adesso una situazione più generale della precedente: non si richiede che la funzione sia analitica dentro tutto il disco unitario, incluso il bordo  $\mathbb{T}$ , ma solo in un anello attorno a  $\mathbb{T}$ , di spessore piccolo a piacere.



Questa è la situazione considerata direttamente nella lezione 15.2.2. (“Serie di Fourier= Serie di Laurent”). La si rilegga, pensandola come una generalizzazione della situazione **1**. In questo caso, si ottiene una classe più ampia di serie di Fourier, poiché non si richiede che la funzione sia analitica in tutto il disco, ma solo in un anello (piccolo a piacere) attorno a  $\mathbb{T}$ .

**3.** Il terzo modo di ottenere delle serie di Fourier con i metodi dell’analisi complessa è quello che emerge dalla dimostrazione del teorema 2. Non è in termini di dischi di convergenza che contengono  $\mathbb{T}$ , ma la funzione  $f(z)$  che si considera è una funzione che è analitica dentro il disco unitario e che sul bordo  $\mathbb{T}$  è uguale ad una funzione continua pre-assegnata.



Questo metodo, si basa sull'analisi del problema di Dirichlet per il disco unitario e non fornisce una vera e propria serie di Fourier, ma una sorta di *serie di Fourier regolarizzata*. Infatti, nulla vieta di associare ad  $f$  la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$$

che converge uniformemente a  $f$  quando  $r \rightarrow 1$ , vale a dire

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}.$$

In matematica, questo limite è chiamato *somma secondo Abel* della serie di Fourier.

Pur non essendo una serie di Fourier vera e propria, per molti versi, la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$$

è un oggetto ancora più interessante, specialmente nelle applicazioni alla teoria dei segnali (ma anche in matematica pura). L'effetto della regolarizzazione è di pulire il segnale in presenza di variazioni rapide o discontinuità e quindi di filtrare via artefatti di riverbero (come avviene nel fenomeno di Gibbs, si veda l'esercizio 15.2(13)).

La figura sotto confronta l'onda quadra ricostruita con Fourier tradizionale (blu) e con Fourier regolarizzato secondo Abel (rosso).



Si sono sommati i primi 100 termini dello sviluppo in serie, e per la regolarizzazione si è scelto  $r = 0.99$ . Probabilmente non è la scelta ottimale.

Ecco l'effetto al bordo per  $N = 200$  e  $r = 0.995$

