

## 16.1. Analisi di Fourier II.

16.1.1. **Regolarizzazione di somme e integrali.** Nella dimostrazione del teorema della completezza del sistema trigonometrico (teorema 2 della lezione 15.2) entrano in gioco due strumenti matematici di precisione che ricorrono costantemente nella fisica: la *regolarizzazione* di una somma o integrale e il *prodotto di convoluzione*. Questi due ingredienti intervengono nella formula

$$(1) \quad f(x) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x - \theta) f(\theta) d\theta = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx} .$$

che ci ha permesso di dimostrare il teorema di completezza della base trigonometrica, usando il metodo del confronto dei limiti e il teorema della proiezione per spazi di Hilbert. Prima di continuare il nostro discorso sull'analisi di Fourier, dedichiamo un po' di tempo a questi metodi matematici, indipendentemente dalle loro applicazioni all'analisi di Fourier.

Incominciamo con la regolarizzazione di somme e integrali Il primo metodo rigoroso per sommare serie divergenti fu pubblicato dal matematico italiano Ernesto Cesaro nel 1890. L'idea è semplice ed è questa: se la successione delle somme parziali  $S_n$  di una serie non converge, magari ne converge la successione delle medie

$$\begin{aligned} \bar{S}_0 &= S_1 \\ \bar{S}_1 &= \frac{1}{2}(S_1 + S_2) \\ \bar{S}_2 &= \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3) \\ &\dots = \dots \\ \bar{S}_N &= \frac{1}{N+1}(S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{N+1}) \\ &\dots = \dots \end{aligned}$$

Una serie è detta convergente secondo Cesaro se la successione delle medie  $\bar{S}_n$  converge. Si può dimostrare facilmente che se una serie converge nel senso tradizionale, allora converge anche secondo Cesaro. Ma ci sono serie divergenti nel senso tradizionale che sono convergenti secondo Cesaro, per esempio,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

è convergente secondo Cesaro a  $1/2$  (esercizio). Per gli integrali, si può definire un'analogia regolarizzazione che rende finiti integrali altrimenti divergenti nel senso tradizionale. Questa idea, in forma meno rigorosa, era già chiara poco meno di un secolo prima al matematico norvegese Niels Abel.

La regolarizzazione di Abel per gli integrali è

$$(2) \quad A\int f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int e^{-\lambda x} f(x)dx$$

( $\lambda$  positivo) e per le serie ne è l'ovvia estensione. Vediamola in azione per la serie  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ . La sua regolarizzazione di Abel è

$$A\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}$$

Anche l'ultimo membro della (1) è una somma secondo Abel,

$$A\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$$

ed è la regolarizzazione di Abel della serie di Fourier. Il fisico, il metodo di Abel per regolarizzare serie e integrali è più usato di quello di Cesaro — forse perché la sommabilità secondo Abel è ancora più liberale di quella secondo Cesaro. Vale infatti il teorema

1. Se  $\sum a_n$  è sommabile secondo Abel è anche sommabile secondo Cesaro.

Un teorema importante, che riguarda la relazione tra sommabilità di Abel e sommabilità tradizionale, è il teorema di Tauber, anch'esso, come quello di Cesaro, del 1890:

2. Se  $\sum a_n$  è sommabile secondo Abel e  $na_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , allora  $\sum a_n$  è sommabile anche nel senso tradizionale.

Infine, un commento sulla terminologia. Parlare di regolarizzazione è, in una certa misura, fuorviante perché suggerisce che esista un modo naturale di definire somme e integrali e poi ci siano dei farmaci per curare le malattie. Niente di più sbagliato: poiché non esiste una nozione algebrica di somma infinita, qualunque somma infinita, inclusa quella tradizionale, è frutto di una definizione basata su un processo di limite. La bontà di una definizione sta solo della sua adeguatezza a cogliere un senso di limite che sia utile nella matematica o nelle applicazioni. Che un senso di limite (ad esempio, quello di limite delle somme parziali) sia più oggettivo degli altri è solo un effetto psicologico.

16.1.2. **Convoluzioni.** Un prodotto di convoluzione

$$f \star P(x) = \int f(y)P(x-y)dy,$$

come quello che compare nella (1), è un'operazione di *allisciamento*. La quintessenza della convoluzione è che il grado di liscezza del prodotto è l'unione dei gradi di liscezza dei suoi fattori. In particolare, valgono i seguenti teoremi:

1. Se una funzione è continua e l'altra discontinua, la loro convoluzione è continua;

2. Se una funzione è derivabile  $n$  volte e l'altra  $m$  volte, la loro convoluzione è derivabile  $n + m$  volte.

Questo significa che se  $P$  è una buona funzione e  $f$  non è tanto buona, il loro prodotto di convoluzione è buono. Il che vuol dire che facendo una scelta oculata di una funzione di riferimento  $P$ , possiamo trasformare una funzione brutta in una bella. Non vogliamo snaturarla, solo pulirla: vorrà dire che sceglieremo una funzione  $P$  che sia una approssimazione liscia di una delta, in modo tale che su una scala non troppo microscopica si abbia

$$f \star P \approx f,$$

e che nella scala microscopica  $f$  venga resa liscia.

**Esempio 1.** Per comprendere il fenomeno di allisciamento, consideriamo il prodotto di convoluzione tra un'approssimante della delta

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$$

e lo scalino unitario, cioè la **funzione di Heaviside**

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

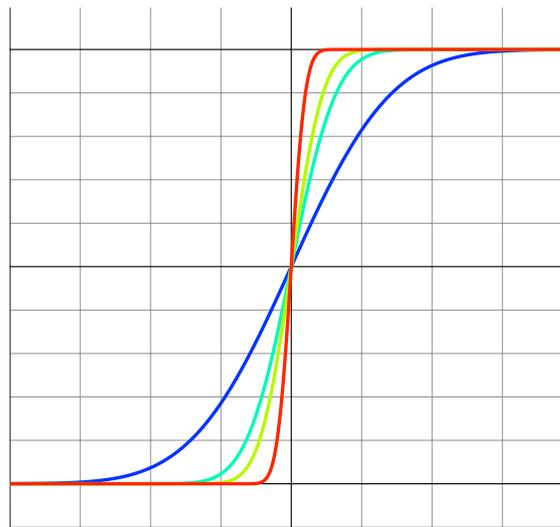
Allora

$$H \star \delta_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta_n(x-y) dy = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{y=0}^{\infty} e^{-n(x-y)^2} dy$$

Fatto il cambiamento di variabili  $u = x - y$ ,  $du = -dy$ , si ha

$$H \star \delta_n(x) = -\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{y=x}^{-\infty} e^{-nu^2} du = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-nu^2} du$$

La figura sotto mostra gli allisciamenti dello scalino per  $-0.8 < x < 0.8$  e  $n = 10, 50, 100, 500$ .



La convoluzione può essere definita per funzioni su  $\mathbb{R}$ , su  $\mathbb{T}$  e su  $\mathbb{R}^n$ . Può anche essere definita anche su insiemi di interi. In questo caso, l'analogo di  $P$  è una matrice e il prodotto di convoluzione è un prodotto di una matrice per un vettore. Queste applicazioni (digitali) della convoluzione hanno applicazioni nell'analisi numerica, nella teoria dell'analisi dei segnali e, in particolare, nella progettazione e implementazione di filtri di risposta ad ingressi impulsivi. La convoluzione si applica anche allo sviluppo di filtri per l'analisi di immagini e in fisica è un utile strumento per pulire una segnatura sperimentale dal rumore di fondo.

Sia come sia, in tutte queste applicazioni c'è qualcosa di analogo a un  $P$  tale che  $f \star P \approx f$ , in una scala opportuna. Una funzione  $P$  di questo tipo è chiamato *nucleo* o *kernel*. Il nucleo di Poisson, che abbiamo incontrato nello studio del problema di Dirichlet e nell'analisi di Fourier, è uno tra i tanti nuclei che sono stati utilizzati. L'esercizio 15.2.(14) riguarda un altro nucleo importante dell'analisi di Fourier, il nucleo di Dirichlet.

**16.1.3. Una nuova notazione per le coordinate di Fourier.** In vista di un balzo successivo verso l'integrale di Fourier, introduciamo una notazione suggestiva per le coordinate di Fourier che è comunemente usata in matematica:

$$\widehat{f}(n) \stackrel{\text{def}}{=} c_n = \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Schema riassuntivo delle puntate precedenti:

$$S_N(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|n| \leq N} \widehat{f}(n) e^{inx}$$

Se  $f(x) \in L^2(\mathbb{T})$  allora

$$f(x) \stackrel{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx} \iff \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N(f)\|_{L^2} = 0$$

e

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{\ell^2}$$

**16.1.4. L'importante contributo di Fejer.** Con Lipót Fejér si entra a pieno titolo nella matematica del 900. I suoi contributi all'analisi di Fourier sono dei primi anni del 900 e, secondo alcuni, diedero un'impronta significativa agli sviluppi dell'analisi di Fourier nei cinquant'anni successivi.

Il problema che Fejér affronta è questo: *possiamo recuperare i valori di una funzione integrabile dalla conoscenza delle sue coordinate di Fourier?* Se per

recuperare si intende la sintesi di Fourier tradizionale,

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx}$$

la risposta è in generale NO. Si può avere sintesi  $L^2$ , come abbiamo appena ricordato, ma la sintesi  $L^2$  non ci permette di concludere nulla sui **valori** puntuali della funzione. (Nel seguito faremo una rassegna dei risultati classici dell'analisi di Fourier e vedremo che la convergenza puntuale richiede che la funzione sia molto regolare).

Tuttavia, Fejér scoprì che *possiamo* sempre recuperare una funzione continua dalle sue coordinate di Fourier, se li sintetizziamo in una maniera diversa da quella tradizionale, cioè se utilizziamo un modo diverso di sommare le serie infinite. Fejér utilizzò il metodo che Cesaro aveva sviluppato una decina di anni prima. (Se  $f$  è solo integrabile, il metodo recupera i valori della funzione solo dove è continua.)

In effetti, questo è proprio il metodo a cui abbiamo accennato alla fine della lezione scorsa, soltanto che abbiamo usato una regolarizzazione secondo Abel anziché una secondo Cesaro. Riassumendo:

$$\mathcal{S}_N^{(r)}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|n| \leq N} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{inx}$$

Se  $f(x) \in C(\mathbb{T})$  allora

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{inx} \iff \lim_{N \rightarrow \infty, r \rightarrow 1} \left\| f - \mathcal{S}_N^{(r)}(f) \right\|_{\infty} = 0$$

Si osservi che la convergenza uniforme delle somme parziali  $\mathcal{S}_N^{(r)}(f)$  è tutt'altro che banale: l'abbiamo in effetti ottenuta studiando il problema di Dirichlet nel piano seguendo le idee di Schwarz. E Schwarz fu il maestro di Fejer. E Fejer nella sua tesi di dottorato studiò il legame tra analisi di Fourier e problema di Dirichlet. Così, senza saperlo (neanche chi scrive), abbiamo già esposto molte delle idee e dei risultati di Fejér.

E abbiamo anche già esposto le ragioni per cui questo metodo funziona: si tratta dell'equazione (1), che qui ripetiamo,

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x - \theta) f(\theta) d\theta = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx}$$

e del ruolo, già discusso, che in essa svolge la convoluzione come strumento di allisciamento.

L'analisi di Fourier, potrebbe essere completamente sviluppata a partire dall'approccio di Fejér. È comunque utile conoscere i risultati classici, che sono l'oggetto dei prossimi discorsi.

16.1.5. **Derivazione delle serie di Fourier.** Con questa sezione incominciamo una rassegna dei risultati classici dell'analisi di Fourier. Il campo è molto ampio e quella che segue è soltanto una selezione che è stata fatta avendo in mente le applicazioni alla fisica. Incominciamo con la derivazione.

Sia  $f(x)$  derivabile con derivata prima continua in  $\mathbb{T}$ . Si osservi che questo implica che la funzione ha lo stesso valore in  $-\pi$  e  $\pi$  e che la stessa vale per la derivata prima. Poiché  $f(x)$  è derivabile, si integri per parti

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx.$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \quad (\text{per parti } \int u dv = uv - \int v du, \text{ con } u = f(x), v = -\frac{1}{in} e^{-inx} ) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{in} e^{-inx} f(x) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{in} f'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{in} \widehat{f'}(n) \end{aligned}$$

Dunque,

$$(3) \quad \widehat{f'}(n) = in \widehat{f}(n)$$

Capito il gioco, con le stesse regole, si ottiene facilmente che se  $f(x)$  è derivabile due volte, con derivata prima e seconda continua, allora

$$\widehat{f''}(n) = -n^2 \widehat{f}(n)$$

Introduciamo adesso una notazione che è standard in matematica:  $C^p(\mathbb{T})$  è l'insieme delle funzioni continuamente derivabili  $p$  volte. In particolare,  $C^0(\mathbb{T})$  è lo spazio  $C(\mathbb{T})$  delle funzioni continue che già conosciamo;  $C^1(\mathbb{T})$  è lo spazio delle funzioni continue con derivata prima continua;  $C^2(\mathbb{T})$  è lo spazio delle funzioni continue derivabili due volte, con derivate prima e seconda continua, e così via. Naturalmente, si ha  $C^p \subset \dots \subset C^2 \subset C^1 \subset C$ .

La discussione sulla derivazione di una serie di Fourier è riassunta dal seguente teorema:

**Teorema 1.** *Se  $f \in C^p(\mathbb{T})$ , allora*

$$\widehat{f^{(p)}}(n) = (in)^p \widehat{f}(n)$$

Dimostrazione. Analoga a quanto visto sopra per  $p = 1$  e  $p = 2$ .

16.1.6. **Andamento all'infinito delle coordinate di Fourier.** Un tema classico dell'analisi di Fourier è la relazione tra le proprietà di regolarità della funzione

$f(x)$  e l'andamento all'infinito delle sue coordinate di Fourier  $\widehat{f}(n)$ . Se  $f \in C^p(\mathbb{T})$  allora per il teorema 1

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(n)| &= \frac{1}{|n|^p} |\widehat{f^{(p)}}(n)| \\ &= \frac{1}{|n|^p} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(x) e^{-inx} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{|n|^p} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(p)}(x)| dx \right) \end{aligned}$$

Poiché  $f^{(p)}(x)$  è per ipotesi continua nell'intervallo chiuso  $[-\pi, \pi]$ , sarà limitata da una costante finita e positiva  $C$ ,

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^p}.$$

Risulta così dimostrato il seguente teorema:

**Teorema 2.** *Se  $f \in C^p(\mathbb{T})$ , allora le sue coordinate di Fourier  $\widehat{f}(n)$  decadono almeno come  $1/|n|^p$  per  $|n| \rightarrow \infty$ .*

**N.B.** Si faccia attenzione al fatto che l'inverso del teorema 2 non vale. La funzione ottenute sintetizzando coordinate che decadono come  $1/n^p$  non solo non è necessariamente una funzione derivabile  $p$  volte, ma non è detto neanche che sia una funzione continua<sup>1</sup>. Come esempio, si consideri la funzione  $f(x)$  che vale 1 se  $x \in [0, 1]$  e 0 altrimenti. La funzione è chiaramente discontinua e le sue coordinate sono

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 e^{-inx} dx = \frac{1 - e^{-in}}{2\pi in}$$

Ne segue che  $|\widehat{f}(n)| \leq 1/(\pi n)$ , e dunque le coordinate di  $f$  decano come  $1/n$ , ma la funzione non è derivabile né continua.

Si osservi che come sottoprodotto del teorema 2 otteniamo, inaspettatamente, un teorema di convergenza per le serie di Fourier:

**Teorema 3.** *Se  $f \in C^2(\mathbb{T})$ , allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in  $\mathbb{T}$ .*

Dimostrazione. Se  $f$  è derivabile due volte, allora  $|\widehat{f}(n)| \leq C/n^2$  e quindi  $\sum \widehat{f}(n)$  è assolutamente convergente. Ma allora è anche uniformemente convergente (si veda la lezione 1.2) e, ovviamente, la convergenza è puntuale.  $\square$

Vale anche il seguente teorema:

---

<sup>1</sup>La situazione è migliore di quanto sembri: per  $p > 1$  si può dimostrare la continuità e per  $p > k + 1$ , si può dimostrare che la funzione è almeno di classe  $C^k$ . Si vedano gli esercizi di riepilogo in calce alla lezione 17.

**Teorema 4.** *Se  $f \in C^1(\mathbb{T})$ , allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in  $\mathbb{T}$ .*

Ma non possiamo dimostrare questo sulla falsa riga del teorema 3, in quanto l'informazione che le coordinate di  $f$  decadono almeno come  $1/n$  non è sufficiente a stabilire la convergenza della serie. Alla fine della sezione daremo una dimostrazione della convergenza puntuale per  $f \in C^1(\mathbb{T})$ . Infine, il seguente teorema stabilisce l'andamento all'infinito delle coordinate per funzioni analitiche.

**Teorema 5.** *Se  $f$  è analitica, allora le sue coordinate di Fourier  $\widehat{f}(n)$  decadono esponenzialmente in  $n$  per  $|n| \rightarrow \infty$ .*

**16.1.7. Velocità di convergenza delle somme parziali.** Si può dimostrare che *più liscia è  $f$  più veloce è la convergenza delle somme parziali di Fourier*. Più precisamente, si può dimostrare che se  $f \in C^p(\mathbb{T})$ , per  $p \geq 2$ , allora esiste una costante  $C$ , indipendente da  $x$ , tale che

$$|f(x) - S_N(f)(x)| \leq \frac{C}{N^{p-1}}$$

e se  $f \in C^1(\mathbb{T})$ , allora esiste una costante  $C$ , indipendente da  $x$ , tale che

$$|f(x) - S_N(f)(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{N}}$$

Questi risultati — che non dimostreremo — forniscono automaticamente la convergenza uniforme delle somme parziali di Fourier per funzioni  $C^p$ ,  $p \geq 1$  e, in particolare, una dimostrazione del teorema 4.

**16.1.8. Funzioni assolutamente integrabili.** Se una funzione è assolutamente integrabile, cioè se

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty,$$

si dice che  $f \in L^1(\mathbb{T})$ . Si osservi che (esercizio)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}.$$

Quindi, se  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , allora  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , ma non è detto che sia vero l'inverso.

Se una funzione è integrabile, le sue coordinate di Fourier decadono a zero. Questo è il contenuto di un famoso lemma:

**Teorema 6** (Lemma di Riemann-Lebesgue). *Se  $f \in L^1(\mathbb{T})$  allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}(n) = 0$$

Dimostrazione. Se  $f \in L^2(\mathbb{T})$ , il teorema è immediato, poichè  $\widehat{f}$  è in  $\ell^2$ . Per la dimostrazione completa, occorre argomentare che  $L^2(\mathbb{T})$  è denso in  $L^1(\mathbb{T})$  nella norma definita da (4). Non intendiamo entrare nei dettagli (né ci aspettiamo che lo faccia lo studente).  $\square$

16.1.9. **Integrazione delle serie di Fourier.** La parola d'ordine è che la derivazione peggiora la convergenza della serie di Fourier (in quando le sue coordinate sono moltiplicate per  $in$ ), ma l'integrazione la migliora. Se la serie è uniformemente convergente, cossichè l'integrale può essere scambiato con il limite delle somme parziali, è chiaro che la serie può essere integrata termine a termine. Come effetto dell'integrazione le coordinate di Fourier  $\widehat{f}(n)$  risultano moltiplicate per  $1/(in)$ . Ma anche se la serie  $\sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$  associata a  $f$  diverge, la serie di Fourier ottenuta per integrazione termine a termine converge, purché  $f \in L^1(\mathbb{T})$ .