

## 17.1. Analisi di Fourier III.

17.1.1. **Teorema di approssimazione di Weierstrass.** Un polinomio trigonometrico è una qualunque funzione della forma  $\sum_{|n|<N} a_n e^{inx}$ , oppure la funzione di seni e coseni che si ottiene da essa usando le formule di Eulero). Vale il teorema:

**Teorema 1** (Weierstrass). *Le funzioni continue su  $\mathbb{T}$  sono approssimate uniformemente dai polinomi trigonometrici. Equivalentemente, i polinomi trigonometrici sono densi nello spazio delle funzioni continue rispetto alla norma uniforme.*

Questo teorema è già stato implicitamente dimostrato. È conseguenza immediata del box

$$\mathcal{S}_N^{(r)}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|n| \leq N} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{inx}$$

Se  $f(x) \in C(\mathbb{T})$  allora

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{inx} \iff \lim_{N \rightarrow \infty, r \rightarrow 1} \left\| f - \mathcal{S}_N^{(r)}(f) \right\|_{\infty} = 0$$

della lezione 16.1.4, il quale è stato dimostrato, a sua volta, nel corso della dimostrazione del teorema sulla completezza del sistema trigonometrico della lezione 15.2, il quale, a sua volta è conseguenza del teorema principale di convergenza uniforme della lezione sul teorema di Dirichlet nel disco unitario (lezione 12.3). Morale: quanta matematica emerge dallo studio delle funzioni armoniche nel disco unitario!

17.1.2. **Convergenza puntuale delle serie di Fourier.** Nella rassegna sui risultati classici manca qualche osservazione sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier. Rimediamo subito.

Consideriamo la somma parziale  $S_N(f)(x)$ . Allora

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{|n| \leq N} \widehat{f}(n) e^{inx} = \sum_{|n| \leq N} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right] e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{|n| \leq N} e^{in(x-y)} \right] f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y) f(y) dy, \end{aligned}$$

dove

$$D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} e^{inx}$$

è noto nella letteratura come nucleo di Dirichlet. Con metodi algebrici elementari è facile mostrare che

$$D_N(x) = \frac{\sin \left[ \left( N + \frac{1}{2} \right) x \right]}{\sin \left( \frac{1}{2} x \right)}$$

Poichè questa somma compare nella teoria della diffrazione di una grata, invitiamo lo studente a leggere come Feynman la deriva, nel capitolo 30 del volume 1 delle sue lezioni di fisica, con la semplice costruzione geometrica riportata sotto

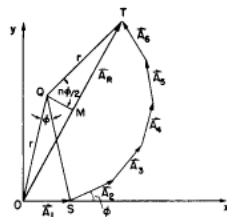


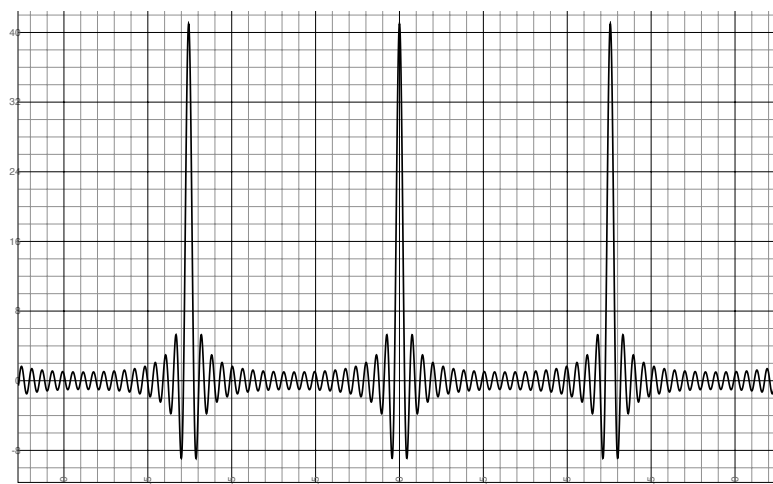
Fig. 30-1. The resultant amplitude of  $n = 6$  equally spaced sources with net successive phase differences  $\phi$ .

(N.B. Feynman somma  $n$  fasori, nel nucleo di Dirichlet ce ne sono  $2N + 1$ )

Il nucleo di Dirichlet ha proprietà analoghe a quelle di un'approssimante della delta in  $[-\pi, \pi]$ . Sfortunatamente, non è positivo, ma oscilla in modo abbastanza selvaggio per  $N$  grande. Tuttavia

$$(1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) = 1$$

(ma non il suo modulo). Sotto ne è riportato un grafico per  $N = 20$ .



Adesso confrontiamo una funzione  $f(x)$  con la sua somma parziale, studiandone la differenza:

$$\Delta_N(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - S_N(f)(x) = f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y)f(y)dy$$

Per la proprietà della convoluzione

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y)f(y)dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)f(x-y)dy$$

e poiché vale la (1), possiamo scrivere

$$f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y)f(y)dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) [f(x) - f(x-y)] dy$$

(si osservi che stiamo facendo passaggi analoghi a quelli per risolvere il problema di Dirichlet nel piano e la coincidenza non è casuale). Dunque,

$$\begin{aligned} \Delta_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) [f(x) - f(x-y)] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left[ \left( N + \frac{1}{2} \right) y \right]}{\sin \left( \frac{1}{2} y \right)} [f(x) - f(x-y)] dy \end{aligned}$$

Vogliamo stabilire quali condizioni debbano essere richieste su  $f$ , nel punto  $x$ , affinché

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N(x) = 0$$

e si abbia così convergenza della serie di Fourier alla funzione  $f$  nel punto  $x$ . Un'idea per risolvere questo problema è la seguente: se

$$g_x(y) = \frac{f(x) - f(x-y)}{\sin \left( \frac{1}{2} y \right)},$$

come funzione di  $y$  è assolutamente integrabile, per cui è soddisfatta la condizione del lemma di Riemann-Lebesgue per un dato  $x$ , allora, in quel punto,  $\Delta_N(x)$  va a zero per il lemma di Riemann-Lebesgue e dunque la serie di Fourier converge, in quel punto, a  $f(x)$ .

Supponiamo che, per un dato  $x$ ,  $g_x(y)$  sia continua come funzione di  $y$  e quindi assolutamente integrabile. Allora, in particolare, è continua per  $y = 0$  e si avrà

$$g_x(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-y)}{\sin \left( \frac{1}{2} y \right)} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-y)}{y} = 2f'(x)$$

Questo significa che se  $f$  è derivabile, la funzione  $g_x(y)$  è continua per tutti gli  $y$ , vale Riemann-Lebesgue, e dunque si ha convergenza puntuale della serie delle coordinate della funzione alla funzione stessa. Con un po' di lavoro in più (che non faremo), si può dimostrare che la convergenza è anche uniforme.

Supponiamo adesso che  $f(x)$  sia discontinua in un punto isolato  $x$  (o più punti isolati). A che cosa converge la successione delle somme parziali  $S_N(f)(x)$ ? Uno

dei primi teoremi sulle serie di Fourier, il teorema di Dirichlet del 1829, stabilisce quello che succede.

**Teorema 2** (di Dirichlet). *Si supponga che, eccetto eventualmente un numero finito di punti,  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  sia continua e la sua derivata sia continua e limitata. Allora, per tutti gli  $x \in \mathbb{T}$ ,*

$$(2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$$

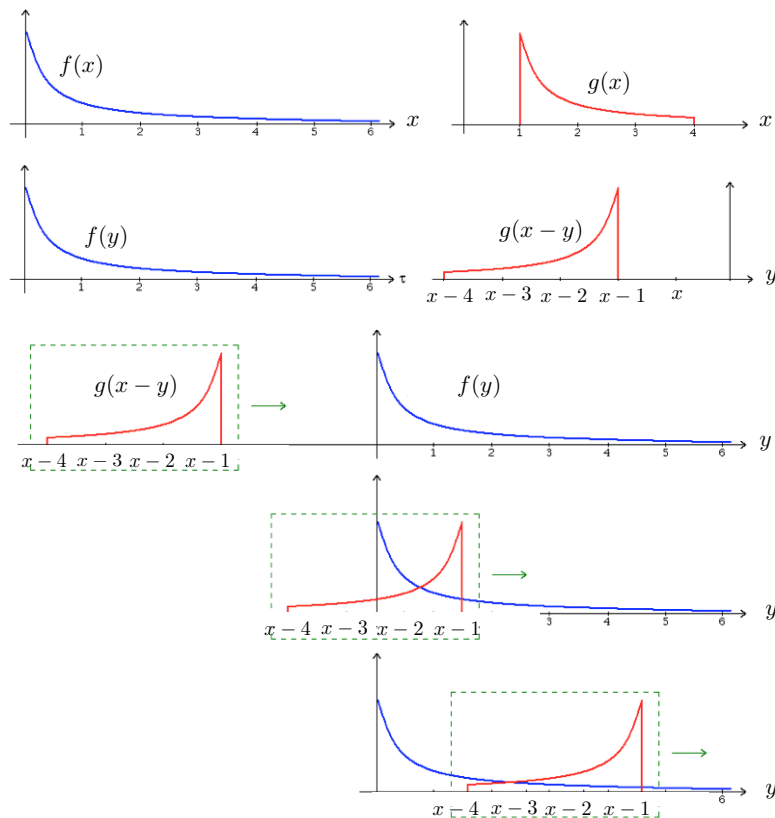
dove  $f(x^+)$  e  $f(x^-)$  sono rispettivamente i limiti destro e sinistro di  $f(y)$  quando  $y$  tende a  $x$ . In particolare,  $S_N(f)(x) \rightarrow f(x)$ , quando  $N \rightarrow \infty$ , in tutti i punti  $x \in \mathbb{T}$  dove  $f(x)$  è continua.

17.1.3. **Proprietà del prodotto di convoluzione.** Occupiamoci più in dettaglio del prodotto di convoluzione di funzioni su  $\mathbb{T}$ .

La convoluzione può essere pensata come un nuovo modo di generare nuove funzioni — a partire da un insieme di funzioni — diverso da quelli soliti di somma, moltiplicazione e composizione di funzioni. Date due funzioni  $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ , integrabili, periodiche di periodo  $2\pi$ , la loro convoluzione su  $\mathbb{T}$  è la nuova funzione  $f \star g$  data da

$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy,$$

Si osservi che si integra sulla variabile muta  $y$  lasciando così una funzione di  $x$ . Il punto  $x-y$  non sarà sempre in  $[-\pi, \pi)$ , ma poiché l'integrando è periodico di periodo  $2\pi$ , conosciamo i valori della funzione integranda dappertutto sulla retta reale. Graficamente, possiamo calcolare  $f \star g$  in un punto  $x$  riflettendo il grafico di  $g(y)$  rispetto all'asse verticale e traslandolo a sinistra di una distanza  $y$  per ottenere  $g(x-y)$ ; lo si moltiplichi adesso per  $f(y)$  e si calcoli l'area sotto il grafico del prodotto risultante  $f(y)g(x-y)$  per  $y \in [-\pi, \pi)$ ; infine si divida per  $2\pi$ . Questo procedimento è illustrato nella figura sotto.



Si osservi che se la funzione periodica  $g$  è integrabile su  $\mathbb{T}$ , allora lo è anche la nuova funzione periodica  $h(y) = g(x - y)$ . Inoltre il prodotto di due funzioni periodiche e integrabili su  $\mathbb{T}$  è ancora periodico e integrabile.

**Esempio 1.** Sia  $g$  la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Usando l'osservazione che

$$a \leq x - y \leq b \iff x - b \leq y \leq x - a$$

vediamo che

$$f \star g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy = \frac{1}{2\pi} \int_{x-b}^{x-a} f(y)dy = \frac{b-a}{2\pi} \times \frac{1}{b-a} \int_{x-b}^{x-a} f(y)dy$$

Così la convoluzione di  $f$  con  $g$ , valutata in  $x$ , risulta essere proporzionale al valor medio di  $f$  sull'intervallo riflesso e traslato  $[x-b, x-a]$ .

**Esercizio 1.** Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si usi il calcolatore per fare un grafico delle iterazioni  $f^{\star 2} = f \star f$ ,  $f^{\star 3} = f \star f \star f$ , ... e si verifichi l'aumento di liscezza delle funzioni così ottenute.

**Proprietà del prodotto di convoluzione.** Siano  $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ , integrabili, periodiche di periodo  $2\pi$  e sia  $c$  una costante. Allora

- (i)  $f \star g = g \star f$  (commutativo)
- (ii)  $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$  (distributivo)
- (iii)  $(cf) \star g = cf \star g$  (omogeneo)
- (iv)  $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$  (associativo)
- (v)  $\widehat{f \star g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$  (l'analisi di Fourier trasforma la convoluzione nella moltiplicazione)

Le prime quattro proprietà sono immediate. Per funzioni continue la quinta proprietà è conseguenza di un semplice calcolo che faremo. Una volta che questa proprietà è stabilita per funzioni continue, può essere estesa a funzioni integrabili mediante approssimazione di funzioni integrabili con successioni di funzioni

continue, e questo non lo faremo. Ecco il calcolo per funzioni continue:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f \star g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \star g(x) e^{-inx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy \right] e^{-inx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) e^{-inx} dx \right] dy \quad (\text{scambio dell'ord. d'integr.: OK funz. cont. [Fubini]}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) e^{-inx} e^{iny} dx \right] dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) e^{-in(x-y)} dx \right] dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x') e^{-inx'} dx' \right] dy \quad (\text{cambio di variabili } x' = x - y) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} \widehat{g}(n) dy \\
 &= \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)
 \end{aligned}$$

Si osservi che al cambiamento di variabili  $x' = x - y$  non corrisponde alcun cambiamento del dominio di integrazione perché l'integrando è una funzione periodica di periodo  $2\pi$ .

Diamo adesso una lista di proprietà che si dimostrano facilmente sulla base di quanto visto finora (ma non lo faremo) e che estende quanto nella lezione 16.1.1.

- (i) Se  $f$  e  $g$  sono continue anche  $f \star g$  lo è.
- (ii) La convoluzione di due funzioni integrabili e limitate è continua.
- (iii) Se una funzione è derivabile  $n$  volte e l'altra  $m$  volte, la loro convoluzione è derivabile  $n + m$  volte.
- (iv) La convoluzione con un polinomio trigonometrico è un polinomio trigonometrico.

17.1.4. **Dizionario spazio/tempo  $\longleftrightarrow$  frequenza spaziale/temporale.** Consideriamo il caso di periodo  $L$ . Allora per  $f(x) \in [-L/2, L/2]$ , estesa per periodicità di periodo  $L$  a tutta la retta reale, si ha

$$(3) \quad \widehat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{2\pi}y\right) e^{iny} dy = \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{L}nx} dx$$

$$(4) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$$

In vista delle applicazioni, si fornisce il seguente dizionario, avendo introdotto la frequenza angolare fondamentale

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{L}$$

che è chiaramente pari a 1 per  $L = 2\pi$ .

| <b>Tempo/Spazio</b> $x \in \mathbb{T}$   | <b>Frequenza Temporale/ Spaziale</b> $n \in \mathbb{Z}$ $\omega \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi/L$ |
|--|--|
| derivate<br>$f^{(p)}(x)$                 | polinomio<br>$\widehat{f^{(p)}}(n) = (in\omega)^p \widehat{f}(n)$                                |
| convoluzione circolare<br>$f \star g(x)$ | prodotto<br>$\widehat{f \star g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$                              |
| traslazione<br>$f_h(x) = f(x - h)$       | modulazione<br>$\widehat{f}_h(n) = e^{-in\omega h} \widehat{f}(n)$                               |

La dimostrazione dell'ultima proprietà (che una traslazione diventa una modulazione) è lasciata come (facile) esercizio.