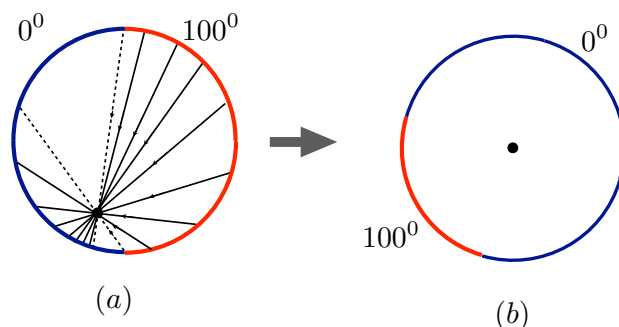


**17.2. Analisi di Fourier e Fisica.** Il campo è vastissimo. Di certo, molte applicazioni dell'analisi di Fourier alla fisica o le avete già incontrate o le incontrerete a breve in altri corsi. In questo corso, giusto un rapido sguardo ad entrambe le direzioni: come la fisica ci permetta di comprendere meglio la matematica e, viceversa, come la matematica di Fourier entra nella fisica. I primi due argomenti che tratteremo riguardano la prima direzione: un ragionamento fisico per capire il fattore  $1/2$  nel teorema di Dirichlet e una discussione del fenomeno di Gibbs. Per quel che riguarda la seconda direzione, ci occuperemo dell'oscillatore armonico (come poteva mancare?), della propagazione del calore e di una particella quantistica in una buca. Alla fine cercheremo di trarre qualche morale generale.

**17.2.1. Il fattore  $1/2$  nel teorema di Dirichlet.** Secondo il teorema di Dirichlet (lezione 17.1.1.) in un punto di discontinuità  $x_0$ , per le somme parziali di Fourier si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)]$$

Nelle lezioni precedenti abbiamo imparato l'idea di Fejer (anche quando non lo sapevamo). Abbiamo cioè imparato che possiamo pensare alla funzione continua che si vuole sintetizzare con Fourier come al limite di una funzione armonica dentro il cerchio quando ci si avvicina al bordo. Questo metodo ci fornisce una versione regolarizzata della serie di Fourier. Adesso andiamo a riprendere le prime idee del nostro studio del problema di Dirichlet nel cerchio (lezione 12.3), quando parlavamo di distribuzione di temperatura sul bordo. In particolare, riconsideriamo le figure che rappresentano la situazione in cui la metà sinistra è del bordo del cerchio è a  $0^\circ$  e quella di destra a  $100^\circ$



Per rispettare le condizioni del teorema di convergenza uniforme (lezione 12.3.7.), possiamo regolarizzare la discontinuità tra caldo e freddo usando uno scalino regolarizzato come visto nella lezione 16.1.2. Adesso, tenuto conto che la temperatura dentro al cerchio è armonica e quindi il suo valore in un punto è pari al valor medio su un piccolo cerchio intorno al punto, che valore ci aspettiamo che abbia quando ci si avvicina ad un punto di confine, sul bordo, tra caldo e freddo, tra  $0^\circ$  e  $100^\circ$ ? Non è ovvio che deve esser  $50^\circ$ , visto che in ogni punto dentro al cerchio,

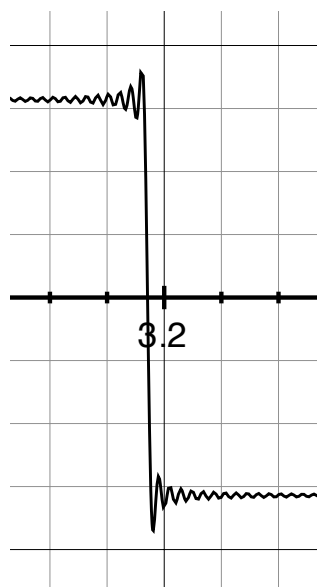
comunque vicino sia al punto al bordo, la temperatura in quel punto deve essere la media della temperatura intorno?

### 17.2.2. *Convergenza puntuale senza uniformità: Il fenomeno di Gibbs.*

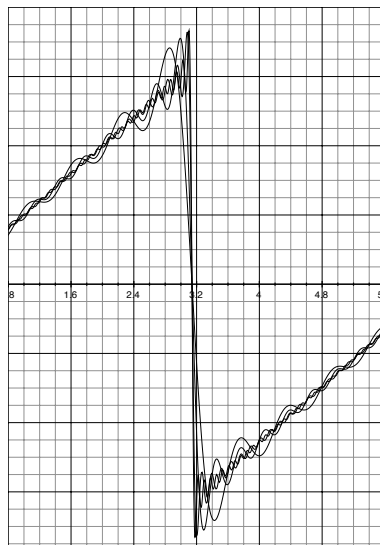
Il fisico americano Albert Michelson inventò molti strumenti di straordinaria precisione, soprattutto nel campo dell'ottica. Nel 1898, costruì un analizzatore armonico che permetteva di determinare le prime 80 coordinate di Fourier di una funzione  $f(x)$  data graficamente. La macchina poteva anche essere usata come sintetizzatore armonico. Perciò Michelson procedette ad una verifica di precisione delle operazioni della macchina, perché, avendo ottenuto le prime 80 coordinate, la macchina doveva sintetizzarle e ridare la funzione originale con un elevato grado di precisione.

Michelson trovò che così era per la maggior parte delle funzioni analizzate, ma quando provò con un'onda quadra scoprì uno strano fenomeno. La sintesi riproduceva l'onda quadra (a parte piccole oscillazioni, ma al punto di discontinuità appariva una protuberanza che non era presente nella funzione originaria. Michelson era perplesso e pensava che forse qualche difetto meccanico interno della macchina poteva causare il problema. Scrisse allora a Josiah Gibbs, l'eminente fisico matematico, tra i padri della moderna meccanica statistica, chiedendogli la sua opinione. Gibbs investigò il fenomeno e lo spiegò (in una lettera a *Nature* nel 1899), sulla base della convergenza non uniforme delle serie di Fourier nella vicinanza di un punto di discontinuità.

Ecco riprodotto per  $N = 80$  in prossimità di  $\pi$ , quanto probabilmente osservò Michelson con il suo strumento



Ed ecco lo stesso fenomeno per l'onda a dente di sega, per  $N = 10, 20, 50, 80$ .



Se avete svolto l'esercizio a casa, conoscete la soluzione. Lo risolveremo comunque in classe.

Consideriamo la serie di Fourier per l'onda a dente di sega  $f(x) = x$  nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  e periodica di periodo  $2\pi$ :

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$$

e sia

$$S_N(f)(x) = -2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$$

la somma parziale della serie per un dato  $N$ . Vogliamo stimare l'errore massimo al variare di  $N$ . A tal fine, determiniamo i massimi di  $S_N(f)(x)$  calcolandone la derivata prima e ponendola uguale a 0. Poniamo inoltre  $z = e^{inx}$ . Si ha

$$\begin{aligned} S_N(f)'(x) &= -2 \sum_{n=1}^N (-1)^n \cos nx \\ &= -2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^N (-z)^n \right] \\ &= -2 \operatorname{Re} \left[ (-z) \frac{1 - (-z)^N}{1 + z} \right] \end{aligned}$$

(ricordando la solita formula per la progressione geometrica). Perciò dobbiamo risolvere l'equazione

$$\operatorname{Re} \left[ (-z) \frac{1 - (-z)^N}{1 + z} \right] = 0$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left[ (-z) \frac{1 - (-z)^N}{1 + z} \right] &= \frac{1}{1 + \cos x} \operatorname{Re} \left\{ e^{ix} [1 - (-1)^N e^{iNx}] [1 + e^{iNx}] \right\} \\
&= \frac{1}{1 + \cos x} \left\{ \cos x + 1 - (-1)^N \cos(N+1)x - (-1)^N \cos Nx \right\} \\
&= 1 + (-1)^{N+1} \frac{1}{1 + \cos x} \left\{ \cos(N+1)x + \cos(N+1)x \cos x + \sin(N+1)x \sin x \right\} \\
&= 1 + (-1)^{N+1} \cos(N+1)x + (-1)^N \frac{\sin(N+1)x \sin x}{1 + \cos x} = 0
\end{aligned}$$

L'espressione si annulla quando

$$x^* = \frac{M}{N+1} \pi$$

e  $M$  ha la stessa parità di  $N$ . Evidentemente il massimo assoluto di  $S_N(f)(x)$  in  $[-\pi, \pi)$  si ha per

$$x_{\max}^* = \frac{N}{N+1} \pi$$

Calcoliamo l'andamento dell'errore massimo

$$E_{\max} = S_N(f)(x_{\max}^*)$$

per  $N \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned}
E_{\max} &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_{\max}^*) \\
&= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{nN\pi}{N+1}\right)}{n} \\
&= -2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{\sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{N+1}\right)}{n} \\
&= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{N+1}\right)}{n} \\
&= 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{N}\right)}{n\frac{\pi}{N}} \frac{\pi}{N}
\end{aligned}$$

Ogni qual volta si incontra un limite del tipo

$$I_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{n}{N}\right) \frac{a}{N}$$

si deve riconoscere che si ha di fronte un integrale di Riemann. Infatti, l'integrale di Riemann è il limite della somma dei  $\Delta x_i$  moltiplicati per il valore della funzione in

un punto qualunque dei  $\Delta x_i$  e ovviamente il limite non dipende dalla partizione. Per  $I_N$  si ha una partizione dell'intervallo  $[0, a]$  in intervallini  $\Delta x_i$  di ampiezza uguale e pari a  $a/N$ ;  $f(n/N)$  è il valore della funzione calcolata nell'estremo destro dei  $\Delta x_i$ . Quindi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{n}{N}\right) \frac{1}{N} = \int_0^a f(x) dx$$

Nel caso dell'errore massimo si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_{\max} = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

La conclusione è dunque che *l'errore massimo non va a zero, ma si assesta su un valore costante per  $N$  grande!* Questo era l'effetto che Michelson osservò con la sua macchina armonica.

Possiamo determinarne il valore numerico. Il calcolo numerico dell'integrale  $2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}$  lo si può fare per sviluppo in serie di Taylor di  $\sin x/x$  e poi passando all'integrazione termine a termine. Diciamo che ci basta un valore numerico con 3 cifre significative dopo la virgola. Si dovrebbe ottenere

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f)(x_{\max}^*) = 3.704$$

Si ha quindi uno sfioramento (rispetto al valore  $y = \pi$  della funzione in  $x = \pi$ ) di 0.562 che è circa il 9% di  $2\pi$ , cioè il 9% della variazione della funzione nel punto di discontinuità  $x = \pi$  (dove la funzione salta da  $\pi$  a  $-\pi$ ). Questo fatto, detto *fenomeno di Gibbs*, è abbastanza universale: se ripetete il calcolo per l'onda quadra, trovate di nuovo uno sfioramento di circa il 9% della variazione della funzione nel punto di discontinuità.

Questo assestamento dell'errore su un valore costante non è ovviamente compatibile con il teorema di Dirichlet: nel punto di discontinuità si ha esatta compensazione tra l'errore a destra e quello a sinistra della discontinuità e la funzione converge alla media tra i limiti destro e sinistro. Come correttamente comprese Gibbs, questo fenomeno è una manifestazione dell'assenza di uniformità del limite in prossimità della discontinuità — l'errore massimo non va a zero. Si osservi che invece l'errore in media quadratico va a zero. Questo fenomeno mostra quanto un teorema di convergenza puntuale sia abbastanza poco informativo.

Si osservi che se si vuole costruire un buon analizzatore e sintetizzatore armonico la matematica di Fejer è di gran lunga più utile. D'altro canto il fenomeno di Gibbs resta pur sempre un fenomeno reale ed è stato sfruttato per scopi pratici. Ad esempio, nel microscopio a contrasto di fase il fenomeno di Gibbs permette di evidenziare il contrasto tra il contorno di un oggetto e lo sfondo.

**17.2.3. L'oscillatore armonico smorzato.** Svolgiamo in classe uno degli esercizi che sono stati assegnati come compito a casa.

Consideriamo l'oscillatore armonico smorzato

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t)$$

dove  $f(t)$  è una forza periodica di periodo  $T$  (termine forzante). Sia

$$(1) \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} n t} dt$$

$$(2) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i \frac{2\pi}{T} n t}$$

Posto  $\omega = 2\pi/L$ , usando il “Dizionario tempo  $\longleftrightarrow$  frequenza temporale” otteniamo

$$[-n^2 \omega^2 + i \gamma \omega + \omega_0^2] \hat{x}(n) = \hat{f}(n)$$

cioè

$$(3) \quad \hat{x}(n) = \frac{\hat{f}(n)}{-n^2 \omega^2 + i \gamma \omega + \omega_0^2}$$

Questa semplice equazione (di certo già incontrata diverse volte), contiene una notevole quantità di fisica. In primo luogo, notiamo che ciascuna coordinata di Fourier della forza guida un singolo modo di Fourier nella risposta dell'oscillatore.

In secondo luogo, il principio di sovrapposizione dei sistemi lineari entra in gioco: secondo l'equazione (2) la risposta totale dell'oscillatore è una sovrapposizione delle risposte di ciascuno dei singoli modi di Fourier. Inoltre, ciascun modo è eccitato indipendentemente e non ha effetti sugli altri modi. Se il sistema avesse avuto un briciolo di non-linearità (ottenuta, per esempio, con l'aggiunta di un termine cubico  $\lambda x^3$  alla forza elastica  $-\omega_0^2 x$ ), avremmo potuto ancora usare la (1) per decomporre il moto in modi di Fourier, ma i modi di Fourier sarebbero risultati accoppiati e non più indipendenti.

In terzo luogo, osserviamo che per modi di Fourier elevati,  $n\omega \gg \omega_0$ , la risposta è circa

$$\hat{x}(n) \sim \frac{\hat{f}(n)}{-n^2 \omega^2}$$

che, all'aumentare di  $n$ , si avvicina a 0 più rapidamente delle coordinate di Fourier della forza. In sostanza, una forzante di frequenza elevata non ha quasi alcun effetto sull'oscillatore. Anche se la forzante ha frequenze molto alte, l'oscillatore si comporta in modo più regolare: non può rispondere molto a frequenze che sono molto più grandi della sua frequenza naturale  $\omega_0$ .

In quarto luogo, per forze esterne di bassa frequenza, cioè tali che  $n\omega \ll \omega_0$  per tutti i modi che intevengono nella forza, la risposta è

$$\hat{x}(n) \sim \frac{\hat{f}(n)}{\omega_0^2}$$

Possiamo allora risommare la serie secondo la (2) e ottenere

$$x(t) \sim \frac{f(t)}{\omega_0^2}$$

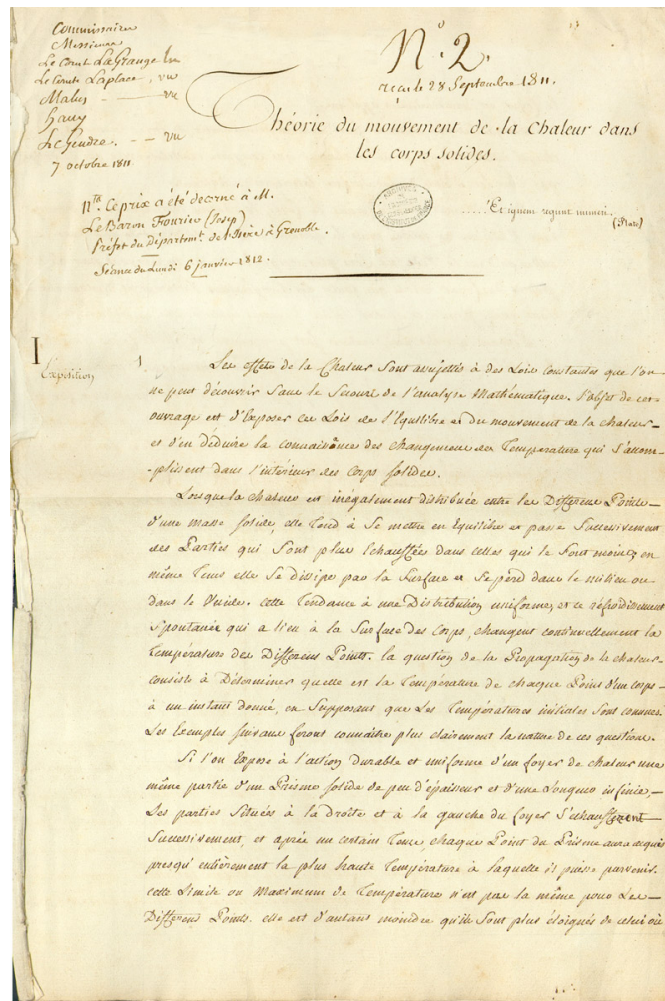
Questo è intuitivamente chiaro da un punto di vista fisico: quando *molto lentamente* si esercita una forza su una molla, la molla risponde cambiando la sua lunghezza proporzionalmente alla forza applicata.

Infine, si osservi che che certi modi di Fourier sono eccitati a livelli più alti di altri modi. Per modi di Fourier tali che

$$n\omega \approx \omega_0 ,$$

il denominatore nella (3) è prossimo a zero se  $\gamma$  è piccolo, e la risposta del sistema esibisce il noto fenomeno della risonanza con le ampiezze che crescono notevolmente.

#### 17.2.4. La memoria originale di Fourier e la buca di potenziale quantitativa.



Prima pagina dell memoria “Théorie du mouvement de la chaleur dans le corps solides” presentata da Jean Baptiste Joseph Fourier nel 1807 all’Accademia di Francia. La commissione che deve giudicare la memoria è formata da Lagrange, Laplace, Haüy, Malus e Legendre. La commissione rende noto il suo verdetto il 16 Dicembre 1811:

*La commission chargée de l'examen des Mémoires qui ont concouru pour le prix de Géométrie, relatif à la chaleur, propose de décerner le prix au Mèmoire n° 2 portant pour épigraphe: “Et ignem regunt numeri (Plato)”. Le président ayant fait l'ouverture du billet cacheté joint au Mémoire, on y trouve le nom de Joseph Fourier. Cette pièce renferme les véritables équations différentielles de transmission de la chaleur[...]; et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet Ouvrage, en*



*observant cependant que la manière dont l'Auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur.*

La memoria non viene pubblicata. L'accettazione definitiva delle idee innovatrici di Fourier e la gloria non arriveranno prima del 1822.

Nella memoria del 1807, Fourier affronta e risolve il seguente problema: *Determinare come evolve nel tempo la temperatura di una sbarretta i cui estremi sono mantenuti a temperatura costante e la cui temperatura al tempo iniziale ha una distribuzione assegnata* (e la sbarretta è separata adiabaticamente dall'esterno). Dapprima, Fourier ricava da considerazioni fisiche, l'equazione per la temperatura  $T = T(x, t)$  che porta il suo nome, e poi passa a risolverla per il problema considerato.

Il problema che Fourier considera è un esempio di *problema al contorno* per un'equazione alle derivate parziali. Detta  $L$  la lunghezza della sbarretta e  $f(x)$  la distribuzione iniziale di temperatura, il problema studiato da Fourier è il seguente:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \text{per } 0 < x < L, t > 0 \\ T(0, t) = T(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0 \\ T(x, 0) = f(x) & \text{per } 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Fourier espande la temperatura iniziale in serie di seni

$$(5) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

con

$$(6) \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

e mostra che la soluzione di (4) è

$$(7) \quad T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa n^2 \pi^2 t / L^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

usando il metodo di Bernoulli di separazione delle variabili. È la soluzione più generale? Sì, per la completezza  $L^2$  del sistema trigonometrico (per le date condizioni al contorno), diremo oggi. E questa era anche la convinzione di Fourier, anche se non sapeva che cosa volesse dire completezza  $L^2$  e non disponeva di una dimostrazione conclusiva (la commissione giudicatrice riteneva infatti che le sue conclusioni lasciavano a desiderare sia per la generalità sia per il rigore).

Prendiamo adesso la funzione (7) e consideriamola come funzione della variabile complessa  $t$ . Facciamo una rotazione nel piano complesso  $t \rightarrow it$  e poniamo

$$(8) \quad \Psi(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} T(x, it) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\kappa n^2 \pi^2 t / L^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Si verifica per sostituzione che questa funzione è soluzione del seguente problema al contorno

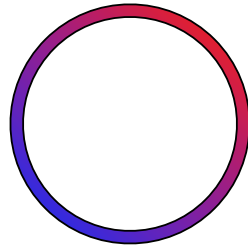
$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} & \text{per } 0 < x < L, t > 0 \\ \Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0 & \text{per } t \geq 0 \\ \Psi(x, 0) = f(x) & \text{per } 0 \leq x \leq L \end{array} \right.$$

Posto  $\kappa = \hbar/2m$ , si riconosce l'equazione di Schrödinger per la buca unidimensionale infinita. È (8) la soluzione più generale? Sì, sempre per la completezza  $L^2$  del sistema trigonometrico (per le date condizioni al contorno). Naturalmente adesso possiamo permettere che le coordinate di Fourier  $b_n$  della funzione d'onda iniziale siano numeri complessi, in quanto la funzione d'onda iniziale (a differenza della temperatura) non è vincolata ad essere reale.

### 17.2.5. *Calore e particella quantistica in un anello infinitamente sottile.*

Forse la morale della sezione precedente risulta più chiara se consideriamo un problema senza condizioni al contorno.

Supponiamo di avere un anello infinitamente sottile  $[-\pi, \pi)$  in cui è assegnata una temperatura iniziale  $f(x)$  e l'anello è separato adiabaticamente dall'esterno cosicché gli scambi energetici possono avvenire solo al suo interno).



Vogliamo sapere come evolve nel corso del tempo la sua temperatura.

Cerchiamo una soluzione di

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

del tipo

$$T(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n, t) e^{inx}$$

Allora, sulla base del “Dizionario spazio  $\longleftrightarrow$  frequenza spaziale”,  $\widehat{f}(n, t)$  deve soddisfare

$$\frac{\partial \widehat{T}(n, t)}{\partial t} = -\kappa n^2 \widehat{T}(n, t)$$

le cui soluzioni sono

$$\widehat{T}(n, t) = e^{-\kappa n^2 t} \widehat{T}(n, 0)$$

Quindi

$$T(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa n^2 t} \widehat{T}(n, 0) e^{inx}$$

Per  $t = 0$  deve essere

$$T(x, 0) = f(x)$$

Quindi

$$\widehat{T}(n, 0) = \widehat{f}(n, 0)$$

(È per questo che Fourier voleva che la sua teoria valesse per funzioni arbitrarie: perché la temperatura iniziale può essere una qualunque funzione.) Allora la soluzione per le date condizioni iniziali è

$$T(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa n^2 t} \widehat{f}(n, 0) e^{inx}$$

Analogo discorso vale per il caso quantistico di una particella confinata in un’anello infinitamente sottile, la cui funzione d’onda

$$\Psi(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i\kappa n^2 t} \widehat{f}(n, 0) e^{inx}$$

è ottenuta dalla temperatura per rotazione nel piano complesso  $t \rightarrow it$ , per  $\kappa = \hbar/m$ .

Nel linguaggio quantistico, i modi di Fourier  $e^{inx}$  sono le autofunzioni dell’hamiltoniana

$$H = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{T}$$

(anello infinitamente sottile  $[-\pi, \pi)$ : nessun condizione ai bordi) e  $E_n = \hbar n^2/m$  sono i suoi autovalori. Infatti,

$$-\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{inx} = \frac{\hbar^2}{m} n^2 e^{inx}$$

Infine,  $\widehat{f}(n, 0)$  sono le ampiezze dello stato iniziale nella base delle autofunzioni.

Tutto ciò risulta trasparente usando la notazione di Dirac e il seguente dizionario

$$\begin{aligned} E_n &\leftrightarrow \hbar n^2/m \\ |E_n\rangle &\leftrightarrow e^{inx} \\ \Psi(x, t) &\leftrightarrow |\Psi_t\rangle \\ f(x) = \Psi(x, 0) &\leftrightarrow |\Psi_0\rangle \end{aligned}$$

Allora

$$(10) \quad |\Psi_t\rangle = \sum_n e^{-iE_n t/\hbar} |E_n\rangle \langle E_n | \Psi_0\rangle$$

Si osservi quanto sia cruciale la completezza del sistema ortonormale  $\{|E_n\rangle\}$ . Deve infatti valere

$$|\Psi_0\rangle = \sum_n |E_n\rangle \langle E_n | \Psi_0\rangle$$

per qualunque stato iniziale  $|\Psi_0\rangle$ . Si osservi inoltre che, data la forma esplicita (10) di  $|\Psi_t\rangle$ , si ha

$$(11) \quad \|\Psi_t\|^2 = \langle \Psi_t | \Psi_t \rangle = \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = \|\Psi_0\|^2 .$$

La normalizzazione dello stato è dunque preservata dall'evoluzione di Schrödinger (sarebbe un disastro, altrimenti!).

Si può dimostrare che una formula come la (11) vale in generale per un'hamiltoniana  $H$  con spettro discreto  $\{E_n\}$ . Il problema dinamico di trovare la soluzione dell'equazione di Schrödinger è dunque risolto automaticamente una volta che sono stati trovati gli autovalori  $E_n$  e gli autovettori associati  $|E_n\rangle$ , vale a dire, sono state risolte le equazioni

$$H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle ,$$

e si è dimostrato che il sistema ortonormale  $\{|E_n\rangle\}$  è completo. Allora la soluzione dell'equazione di Schrödinger è automaticamente data da (10).

**17.2.6. Spazi funzionali e fisica.** Il primo a dimostrare che vale una formula come la (11) fu Schrödinger stesso in uno dei suoi quattro lavori del 1926 sulla meccanica ondulatoria (tutti con il titolo “La quantizzazione come un problema di autovalori”).

Sia

$$\rho(x) = |\Psi(x, t)|^2 = \overline{\Psi(x, t)} \Psi(x, t)$$

con  $\Psi$  che soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi$$

Allora, dopo aver osservato che

$$-i\hbar \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial x^2} + V(x)\overline{\Psi}$$

si trova

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \Psi + \bar{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\
&= \left[ -i \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V(x) \bar{\Psi} \right] \Psi + \bar{\Psi} \left[ i \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V(x) \Psi \right] \\
&= -i \frac{\hbar}{2m} \left[ \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} \Psi - \bar{\Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right] \\
&= -i \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Psi - \bar{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} \left[ i \frac{\hbar}{m} \left( \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Psi - \bar{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right]
\end{aligned}$$

Risulta così dimostrata l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$$

per

$$\rho(x) = |\Psi(x, t)|^2 \quad \text{e} \quad J = \operatorname{Im} \left[ i \frac{\hbar}{m} \left( \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Psi - \bar{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right]$$

Se vale un'equazione di continuità per  $\rho = |\Psi(x, t)|^2$ , allora

$$\int |\Psi(x, t)|^2 dx = \text{costante}$$

e la (11) risulta dimostrata. Questo significa che l'evoluzione di Schrödinger preserva la norma  $L^2$  della funzione d'onda. In altre parole, lo spazio funzionale adeguato per l'equazione di Schrödinger è lo spazio di Hilbert  $L^2$ . Lavorando in questo spazio, siamo automaticamente certi che qualunque processo di limite o operazione funzionale fatto ad un certo tempo non dipenderà dal tempo stesso, in quanto la norma  $L^2$  è indipendente dal tempo.

Consideriamo adesso l'equazione del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Questa equazione è ottenuta dall'equazione di continuità

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$$

che esprime la conservazione locale della densità di energia  $\propto T(x, t) = |T(x, t)|$  (assumiamo di lavorare con la temperatura assoluta che è sempre positiva) rispetto alla densità di corrente di Fourier,

$$J = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

Ne segue che, dall'equazione del calore discende la legge di conservazione

$$\int |T(x, t)| dx = \text{costante}$$

e quindi che l'equazione del calore preserva la norma  $L^1$  della temperatura (che corrisponde all'energia totale). In altre parole, lo spazio funzionale adeguato per l'equazione del calore è lo spazio di Banach  $L^1$ .

A questo proposito, si osservi che la norma  $L^1$  è preservata nel limite  $t \rightarrow \infty$ . In effetti, la norma  $L^1$

$$\int |T(x, t)| dx$$

di

$$T(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa n^2 t} \widehat{f}(n, 0) e^{inx}$$

è proprio la temperatura di equilibrio costante. Si ha infatti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(x, t) = \widehat{f}(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int T(x, 0) dx$$

in quanto per  $t \rightarrow \infty$  nella somma sopravvive solo il termine  $n = 0$  (gli altri muoiono). Che è proprio (modulo una costante) l'energia iniziale, ovvero la media della distribuzione iniziale di temperatura.

Se avessimo considerato l'equazione delle onde, la norma adeguata sarebbe stata quella associata alla quantità conservata per l'equazione delle onde (la somma di energia cinetica ed energia elastica). Questa norma in matematica è associata ad uno spazio di Sobolev.

*Morale: sono le equazioni della fisica a decidere quale è lo spazio funzionale adeguato per lo studio delle loro proprietà matematiche. Tipicamente, questi spazi sono definiti dalle proprietà locali di conservazione delle equazioni stesse.*