

18.2. Il paradiso dell'integrale di Fourier.

Lo spazio delle funzioni buone è il paradiso dell'integrale di Fourier. Vale il teorema:

Teorema 1 (teorema di inversione di Fourier per funzioni buone). *Se $f(x)$ è una funzione buona, la sua trasformata di Fourier*

$$(1) \quad \widehat{f}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx$$

esiste ed è una funzione buona. Inoltre,

$$(2) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)e^{2\pi ixy} dy$$

E tutte le proprietà dell'integrale di Fourier che si utilizzano nella pratica si dimostrano facilmente e rigorosamente in questo paradiso.

18.2.1. Osservazioni, notazioni e convenzioni.

Le equazioni (1) e (2) definiscono un operatore F sul dominio delle funzioni buone e il suo inverso F^{-1} nel seguente modo

$$(Ff)(y) = \widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx$$
$$(F^{-1}g)(x) = g^\vee(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{2\pi ixy} dy$$

Il contenuto del teorema 1 è che $FF^{-1} = F^{-1}F = I$, dove I è l'operatore identità che trasforma ogni funzione buona in sé stessa. In una lezione successiva vedremo che l'operatore F può essere esteso a $L^2(\mathbb{R})$. L'operatore F è unitario sullo spazio delle funzioni buone, cioè è tale che

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(y)|^2 dy = \|\widehat{f}\|^2$$

Dimostreremo questo alla fine della lezione.

Occorre sapere che ci sono altre convenzioni per definire la trasformata di Fourier. Passiamo in rassegna le convenzioni più popolari. Le distingueremo cambiando nome alle variabili indipendenti, e introducendo dei pedici:

$$\textcircled{1} \quad \widehat{f}_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy} dx$$
$$\textcircled{2} \quad \widehat{f}_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx$$
$$\textcircled{3} \quad \widehat{f}_3(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

La ① è quella che abbiamo adottato. Con la ②, la trasformazione inversa diventa

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_2(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

A differenza della ①, la trasformata di Fourier definita dalla ② non è unitaria. Con la ③, la trasformazione inversa diventa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_3(k) e^{ikx} dx$$

In questo caso c'è simmetria tra la trasformata e la sua inversa, e la trasformata definita dalla ③ è unitaria in $L^2(\mathbb{R})$. Ecco le regole per passare dall'una all'altra (che si ricavano facilmente dalle definizioni):

$$\begin{aligned} \widehat{f}_1(y) &= \widehat{f}_2(2\pi y) = \sqrt{2\pi} f_3(2\pi y) \\ \widehat{f}_2(\omega) &= \widehat{f}_1\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \sqrt{2\pi} f_3(\omega) \\ \widehat{f}_3(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}_1\left(\frac{k}{2\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}_2(k) \end{aligned}$$

Nel seguito, quando non metteremo nessun pedice, sottoinderemo che stiamo usando la convenzione ①. Difficile dire quale convenzione sia migliore. Ognuna ha i suoi pro e i suoi contro. Dipende dal contesto. Se si lavora con spazi di Hilbert, la ① e ③ sono preferibili perché unitarie. Tuttavia, la ② sembra più semplice e ha anch'essa i suoi pregi. Per quanto sia fastidioso, conviene avere presente tutte e tre le convenzioni.

Esempio 1. Consideriamo la gaussiana

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

Nella lezione 10.1, abbiamo usato la convenzione ② e trovato (allora avevamo chiamato k la variabile indipendente)

$$\widehat{f}_2(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

Con la convenzione ①, che è quella che stiamo seguendo adesso, si ha

$$\widehat{f}_1(y) = \widehat{f}_2(2\pi y) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 y^2}{a}}$$

Con la convenzione ③

$$\widehat{f}_3(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}_2(k) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

18.2.2. *Trasformate di Fourier di funzione buone.*

Nel seguito daremo una dimostrazione del Teorema 1. Tuttavia questo non è l'obiettivo principale della lezione. Scopo della lezione è introdurre varie proprietà delle trasformate di Fourier di interesse generale. Nel fare ciò, useremo anche un linguaggio fisico: per descrivere $f(x)$ parleremo di funzione nel dominio dello spazio (o del tempo) e per $\widehat{f}(y)$ parleremo di funzione nel dominio delle frequenze. In questa lezione ci occuperemo solo di funzioni buone.

Dalla lezione 9.2, richiamiamo la nozione di funzione buona: una funzione di $x \in \mathbb{R}$ che è infinitamente differenziabile e tale che essa e le sue derivate decrescono all'infinito più rapidamente di qualunque potenza negativa di $|x|$. Adesso mostriamo che se $f(x)$ è una funzione buona, allora anche

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i y x} dx$$

lo è. A tal fine, deriviamo la trasformata di Fourier $\widehat{f}(y)$ p volte. Poiché f è buona, possiamo scambiare derivata e integrale

$$\widehat{f}^{(p)}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^p}{dy^p} [f(x) e^{-2\pi i y x}] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi i x)^p f(x) e^{-i 2\pi y x} dx$$

Integriamo per parti N volte il secondo membro (tenendo conto che f si annulla all'infinito) secondo lo schema

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(-2\pi i x)^p f(x)}_{\text{deriviamo}} \underbrace{e^{-i 2\pi y x}}_{\text{integriamo}} dx.$$

Otteniamo

$$\widehat{f}^{(p)}(y) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N}{dx^N} [(-2\pi i x)^p f(x)] \frac{1}{(2\pi i y)^N} e^{-2\pi i y x} dx$$

Allora

$$\begin{aligned} |\widehat{f}^{(p)}(y)| &= \left| \frac{1}{(2\pi i y)^N} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^N}{dx^N} [(-2\pi i x)^p f(x)] e^{-2\pi i y x} dx \right| \\ &\leq \frac{(2\pi)^{p-N}}{|y|^N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^N}{dx^N} [x^p f(x)] \right| dx \end{aligned}$$

Quindi $\widehat{f}^{(p)}$ è di ordine $|y|^{-N}$ per ogni N , cioè decresce più rapidamente di qualunque potenza negativa di $|y|$; in breve, è una funzione buona. Fine. La prima parte del teorema è dimostrata.

18.2.3. *Proprietà delle trasformate di Fourier.*

Incominciamo col discutere come le più importanti operazioni nel dominio spaziale (o temporale) si trasformano nel dominio delle frequenze.

Linearità. La trasformata di Fourier è lineare. Per qualunque coppia di numeri complessi α e β si ha:

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \xrightarrow{F} \alpha \widehat{f}(y) + \beta \widehat{g}(y)$$

Derivata. È utile sapere quale operazione sulla trasformata di Fourier corrisponde all'operazione di derivata sulla funzione di partenza. Questo è facile. Consideriamo la trasformata di Fourier della derivata:

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i y x} dx \quad \text{integriamo per parti} \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-2\pi i y) e^{-2\pi i x y} dx \\ &= (2\pi i y) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx \\ &= (2\pi i y) \widehat{f}(y) \end{aligned}$$

Quindi, all'operazione di derivazione nel dominio spaziale corrisponde l'operazione di moltiplicazione per [argomento della funzione $\times 2\pi i$] nel dominio delle frequenze:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & f'(x) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \widehat{f}(y) & \xrightarrow{\times (2\pi i y)} & (2\pi i y) \widehat{f}(y) \end{array}$$

Traslazioni. Consideriamo l'effetto di una traslazione spaziale nel dominio delle frequenze. Anche questo è facile. Sia $\tau_b f(x) = f(x - b)$ l'operazione di traslazione della funzione¹ del numero reale b . Allora

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_b f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - b) e^{-2\pi i x y} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-2\pi i y (x'+b)} dx' \\ &= e^{-2\pi i y b} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx \\ &= e^{-2\pi i y b} \widehat{f}(y) \end{aligned}$$

¹Per esempio, la gaussiana e^{-x^2} centrata nell'origine diventa la gaussiana $e^{-(x-h)^2}$ spostata di un tratto h a destra (se h è assunto positivo).

In altre parole, all'operazione di *traslazione* nel dominio spaziale corrisponde l'operazione di *modulazione* nel dominio delle frequenze:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\tau_b} & f(x-b) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \widehat{f}(y) & \xrightarrow{M_{-b}} & e^{-2\pi i y b} \widehat{f}(y) \end{array}$$

dove

$$M_b h(u) = e^{2\pi i u b} h(u)$$

Modulazioni. Consideriamo adesso una modulazione $M_b f(x) = e^{2\pi i x b} f(x)$ nel dominio spaziale. Che cosa diventa nel dominio delle frequenze? Facile:

$$\begin{aligned} \widehat{M_b f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x b} f(x) e^{-2\pi i x y} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i (y-b)x} dx \\ &= \widehat{f}(y-b) \end{aligned}$$

Diagrammaticamente,

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{M_b} & e^{2\pi i x b} f(x) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \widehat{f}(y) & \xrightarrow{\tau_b} & \widehat{f}(y-b) \end{array}$$

Cambiamento di scala. Anche sapere quale sia l'effetto di un cambiamento di scala è utile. Consideriamo l'operazione di *cambiamento di scala*² $D_\alpha f(x) = f(\alpha x)$. Allora

$$\begin{aligned} \widehat{D_\alpha f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{-2\pi i x y} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-2\pi i x' y / \alpha} d\frac{x'}{\alpha} \\ &= \frac{1}{|\alpha|} \widehat{f}\left(\frac{y}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Quindi, ad una “compressione” della funzione nel dominio spaziale corrisponde una dilatazione nel dominio delle frequenze e viceversa (si pensi al passaggio della

²Che induce, per $\alpha > 1$, una “compressione” della funzione. Per non fare confusione si tenga a mente l'esempio della gaussiana $\mathcal{N}e^{-ax^2}$: aumentare a significa diminuirne lo scarto quadratico medio, cioè restringere la gaussiana.

luce attraverso una fenditura sottile e allo sparpagliamento delle frequenze spaziali, cioè dei numeri d'onda, che ne consegue).

Inversione temporale. Il caso $\alpha = -1$ porta alla proprietà di inversione temporale (interpretando x come un tempo) o di parità (interpretando x come uno spazio): se $h(x) = f(-x)$ allora $\widehat{h}(y) = \widehat{f}(-y)$. In maniera diagrammatica, chiamando \mathcal{I} l'inversione $x \rightarrow -x$, si ha

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\mathcal{I}} & f(-x) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \widehat{f}(y) & \xrightarrow{\mathcal{I}} & \widehat{f}(-y) \end{array}$$

Coniugazione complessa. Se $h(x) = \overline{f(x)}$, allora

$$\begin{aligned} \widehat{h}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{-2\pi ixy} dx \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi ixy} dx} \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ix(-y)} dx} \\ &= \widehat{f}(-y). \end{aligned}$$

In altre parole, detta \mathcal{C} , l'operazione di coniugazione complessa, si ha

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\mathcal{C}} & \overline{f(x)} \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \widehat{f}(y) & \xrightarrow{\mathcal{I} \circ \mathcal{C}} & \overline{\widehat{f}(-y)} \end{array}$$

Condizioni di realtà. In particolare, se $f(x)$ è reale si ha

$$\widehat{f}(-y) = \overline{\widehat{f}(y)}$$

mentre se $f(x)$ è puramente immaginaria si ha

$$\widehat{f}(-y) = -\overline{\widehat{f}(y)}$$

Convoluzione. Consideriamo adesso il prodotto di convoluzione. La convoluzione di due funzioni f e g su \mathbb{R} è definita come

$$f \star g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

Naturalmente, mentre la prima uguaglianza è una definizione, la seconda uguaglianza va dimostrata. Ma la dimostrazione è facile e ricalca quella che abbiamo

visto nella lezione 17.1 per la convoluzione di funzioni su \mathbb{T} . Sia su \mathbb{T} sia su \mathbb{R} il prodotto di convoluzione è commutativo

$$f \star g = g \star f.$$

In analisi armonica, sia essa su \mathbb{T} o su \mathbb{R} , la convoluzione è un'operazione importante per le ragioni che abbiamo già visto: è un'operazione di allisciamento e la sua trasformata di Fourier è il prodotto delle trasformate. Inoltre, se f e g sono funzioni buone anche $f \star g$ lo è. Questo si può vedere prendendo la derivata del prodotto di convoluzione:

$$\frac{d}{dx} f \star g(x) = f' \star g(x) = f \star g'(x)$$

La prima uguaglianza vale perché possiamo scambiare derivata e integrale per funzioni buone, la seconda segue dalla commutatività del prodotto di convoluzione. Quindi, se f e g sono buone, anche $f \star g$ e le sue derivate hanno decrescenza rapida, cioè $f \star g$ è una funzione buona.

In maniera analoga a quanto visto nel caso di convoluzioni su \mathbb{T} si può dimostrare che

$$\widehat{f \star g}(y) = \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$$

e anche che

$$\widehat{fg}(y) = \widehat{f} \star \widehat{g}(y)$$

In altre parole, all'operazione di prodotto di convoluzione nel dominio spaziale corrisponde l'operazione di prodotto usuale nel dominio delle frequenze e, viceversa, all'operazione di prodotto usuale nel dominio spaziale corrisponde l'operazione di prodotto di convoluzione nel dominio delle frequenze:

$$\begin{array}{ccc} f(x), g(x) & \xrightarrow{\star} & f \star g(x) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \widehat{f}(y), \widehat{g}(y) & \xrightarrow{\times} & \widehat{f}(y)\widehat{g}(y) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} f(x), g(x) & \xrightarrow{\times} & f(x)g(x) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \widehat{f}(y), \widehat{g}(y) & \xrightarrow{\star} & \widehat{f} \star \widehat{g}(y) \end{array}$$

18.2.4. *Dimostrazione del teorema di Fourier per funzioni buone.*

Argomento formale: dal secondo membro della (2) otteniamo $f(x)$ mediante manipolazioni formali:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i u y} du \right] e^{2\pi i x y} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i (u-x)y} dy \right] f(u) du \quad (\text{illecito cambio dell'ordine di integrazione!!!}) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u-x) f(u) du \quad ([\dots] = 0 \text{ per } u \neq x, [\dots] = \infty \text{ per } u = x) \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

Questo è insoddisfacente, ma può essere reso facilmente rigoroso introducendo un “ammorbidente”³ $e^{-\epsilon y^2}$ dentro l’integrale di partenza. Con l’ammorbidente, abbiamo

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{-\epsilon y^2} e^{2\pi i x y} dy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon y^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2\pi i u y} du \right] e^{2\pi i x y} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon y^2} e^{-2\pi i (u-x)y} dy \right] f(u) du \quad (\text{il cambio dell'ordine di integrazione è lecito}) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} e^{-\pi^2 (u-x)^2 / \epsilon} f(u) du \quad (\text{trasformata di Fourier della gaussiana calcolata in } u-x) \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} f_{\epsilon}(x) \quad (\text{decidiamo di chiamarlo così})
 \end{aligned}$$

Adesso osserviamo che

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} e^{-\pi^2 (u-x)^2 / \epsilon} = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \sqrt{\frac{\pi}{\pi^2 / \epsilon}} = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \sqrt{\frac{\epsilon}{\pi}} = 1$$

³“Mollifier” in inglese. Questo è, in effetti, un termine tecnico che in matematica denota un’operazione di “ammorbimento” come quella che stiamo per fare. In spirito, è analogo alla regolarizzazione di Abel.

e consideriamo la differenza Δ_ϵ tra $f(x)$ e $f_\epsilon(x)$:

$$\begin{aligned}
 \Delta_\epsilon &= |f(x) - f_\epsilon(x)| \\
 &= \left| f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} e^{-\pi^2(u-x)^2/\epsilon} f(u) du \right| \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} e^{-\pi^2(u-x)^2/\epsilon} [f(x) - f(u)] du \right| \quad (\text{per la (3)}) \\
 &\leq \max |f'(x)| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} e^{-\pi^2(u-x)^2/\epsilon} |x-u| du \quad (\text{per il teorema del valor medio}^{(*)}) \\
 &= \max |f'(x)| \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} \frac{\epsilon}{\pi^2} \quad (\text{perché } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} |x| = 1/a \text{ }^{(**)}) \\
 &= C\sqrt{\epsilon} \quad (\text{dove } C \text{ è una costante})
 \end{aligned}$$

(*) Come nella lezione 9.2, si è usato $|f(x) - f(u)| \leq \max |f'(x)| |x - u|$, che non è altro che il teorema del valor medio per funzioni continue e differenziabili.

(**) La formula $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} |x| = 1/a$ è stata dimostrata nella lezione 9.2.2. In questo caso $a = \pi^2/\epsilon$, cioè $1/a = \epsilon/\pi^2$

Allora per $\epsilon \rightarrow 0$ si ha che $\Delta_\epsilon \rightarrow 0$. Otteniamo così la formula di inversione (2) e il teorema risulta dimostrato.

Si osservi che la formula di inversione può essere equivalentemente espressa così: posto $g(y) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{f}(y)$, la funzione $f(y)$ di partenza è la trasformata di Fourier di $g(-x)$. Infatti

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{2\pi i y x} dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-2\pi i y (-x)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(-y) e^{-2\pi i y} dy$$

(non ci si faccia distrarre da come chiamiamo le variabili indipendenti, sia sotto il segno di integrale sia fuori).

Si può esprimere questo fatto in termini operatoriali, usando l'operatore di inversione \mathcal{I} introdotto nella 18.2.2 e l'operatore di trasformata di Fourier F , come

$$I = F \mathcal{I} F$$

Esercizio 1. *Dimostrare che $F^4 = I$ (naturalmente nel dominio delle funzioni buone che è, per il momento, il solo dominio in cui abbiamo definito l'operatore F).*

18.2.5. *Identità di Parseval-Plancherel.*

Calcoliamo il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R})$ delle trasformate di Fourier $\widehat{f}_1(y)$ e $\widehat{f}_2(y)$ di due funzioni buone $f_1(x)$ e $f_2(x)$,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f}_1 | \widehat{f}_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} \widehat{f}_2(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) dx e^{-2\pi ixy} dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} f_2(x) e^{-2\pi ixy} dx dy \quad (\text{lecito, l'integrale è assolutamente convergente}) \end{aligned}$$

Adesso calcoliamo il prodotto scalare tra $f_1(x)$ e $f_2(x)$,

$$\begin{aligned} \langle f_1 | f_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(x)} f_2(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} e^{2\pi ixy} dy \right] f_2(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f}_1(y)} f_2(x) e^{-2\pi ixy} dx dy \quad (\text{lecito, l'integrale è assolutamente convergente}) \end{aligned}$$

Sono uguali! Abbiamo così dimostrato che la trasformata di Fourier preserva i prodotti scalari e che, per $f_1 = f_2$, vale l'identità di Parseval-Plancherel

$$\|f\|^2 = \|\widehat{f}\|^2$$

È ora di dare un nome più dignitoso all'insieme delle funzioni buone. Nella letteratura questo insieme è chiamato spazio di Schwartz — in onore del matematico francese Laurent Schwartz che lo introdusse per sviluppare la teoria delle funzioni generalizzate o distribuzioni — ed è denotato usualmente con $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Non è uno spazio di Hilbert: successioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ hanno limiti fuori dallo spazio stesso, ma si può dimostrare che è denso in $L^2(\mathbb{R})$. È uno spazio-prehilbertiano con norma L^2 .

Riassumendo, in questa lezione abbiamo mostrato che $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è chiuso rispetto alla trasformata di Fourier $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, che F è invertibile in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, cioè esiste $F^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e che F è un operatore unitario in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, cioè conserva le norme e i prodotti scalari di funzioni in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.