

19.1. Il nucleo del calore e altre applicazioni.

19.1.1. *Il nucleo del calore.*

ANALISI DIMENSIONALE

Vogliamo studiare la propagazione del calore in un filo (adiabaticamente isolato) di lunghezza infinita. Consideriamo l'equazione del calore¹

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial x^2},$$

Come abbiamo già sottolineato, questa equazione è ottenuta dall'equazione di continuità

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial x}$$

che esprime la conservazione locale della densità di energia $\propto \mathcal{T}(x, t)$. Questo significa che vale la legge di conservazione

$$\int |\mathcal{T}(x, t)| dx = \Theta \propto \text{Energia totale}$$

e quindi che l'equazione del calore preserva la norma L^1 della temperatura. In altre parole, come abbiamo già messo in evidenza per la propagazione del calore in un filo finito, lo spazio funzionale adeguato per l'equazione del calore è lo spazio di Banach L^1 . Per un filo di lunghezza infinita, è lo spazio $L^1(\mathbb{R})$.

Supponiamo di volere trovare una soluzione dell'equazione del calore con i metodi dell'analisi dimensionale: $[D] = L^2 T^{-1}$ è una costante del problema; $\Theta = L\theta$ ($\theta =$ temperatura), è proporzionale alla quantità iniziale di energia immessa nel sistema. Naturalmente, $[x] = L$ e $[t] = T$. La quantità

$$u = x/\sqrt{Dt}$$

è adimensionale. La soluzione che cerchiamo è una temperatura: $[\mathcal{T}] = \theta$. Cerchiamola come funzione di (t, D, Θ) . Deve quindi valere

$$[\mathcal{T}] = \theta = [t]^a [D]^b [\Theta]^c = T^a L^{2b} T^{-b} \theta^c L^c = L^{2b+c} T^{a-b} \theta^c$$

da cui

$$2b + c = 0 \quad a - b = 0 \quad c = 1$$

che ha soluzioni

$$a = -\frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{2} \quad c = 1$$

Quindi l'analisi dimensionale ci dice che la soluzione è della forma

$$\mathcal{T}(x, t) = \frac{\Theta}{\sqrt{Dt}} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)$$

¹Usiamo il simbolo \mathcal{T} in vece di T perché tra poco faremo dell'analisi dimensionale e T denoterà la dimensione del tempo.

dove $\Phi = \Phi(u)$ è una funzione da determinare. Il punto importante è che Φ è una funzione di *una* variabile adimensionata, la combinazione $u = x/\sqrt{Dt}$, e non di x e t separatamente. Ora,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\Theta}{\sqrt{Dt}} \frac{1}{Dt} \Phi''(u) \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \frac{\Theta}{\sqrt{Dt}^{3/2}} [\Phi(u) + u\Phi'(u)]\end{aligned}$$

Per l'equazione del calore

$$\frac{\Theta}{\sqrt{Dt}} \frac{1}{Dt} \Phi'(u) = -D \frac{1}{2} \frac{\Theta}{\sqrt{Dt}^{3/2}} [\Phi(u) + u\Phi'(u)]$$

da cui

$$\Phi'' + \frac{u}{2}\Phi' + \frac{1}{2}\Phi = 0$$

Con il vincolo (conservazione dell'energia = norma L^1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) du = 1$$

L'equazione sembrerebbe difficile da risolvere, ma non lo è. Riconosciamo a primo membro un differenziale esatto:

$$\frac{d}{du} \left[\Phi' + \frac{u}{2}\Phi \right] = 0$$

Quindi

$$\Phi' + \frac{u}{2}\Phi = \text{costante}$$

Tuttavia, ogni soluzione fisicamente ragionevole deve avere $\Phi \rightarrow 0$ e $\Phi' \rightarrow 0$ quando $u \rightarrow \infty$. Quindi la costante di integrazione deve essere zero. L'equazione diventa

$$\Phi' + \frac{u}{2}\Phi = 0$$

Abbiamo già incontrato questa equazione nella lezione 10.1 quando abbiamo calcolato la trasformata di Fourier di una gaussiana con il metodo della derivazione sotto il segno di integrale². La soluzione è

$$C e^{-u^2/4}$$

Determiniamo C imponendo la normalizzazione $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) du = 1$, da cui

$$C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/4} du = C\sqrt{4\pi} = 1$$

²E avevamo trovato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

Dunque

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-u^2/4}$$

Ritornando alle variabili originali,

$$\mathcal{T}(x, t) = \frac{\Theta}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}$$

SOLUZIONE GENERALE

È sorprendente che un po' di analisi dimensionale ci abbia permesso di trovare una soluzione di

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

E forse è ancora più sorprendente che la soluzione trovata,

$$f(x, t) = \mathcal{T}(x, t) = \frac{\Theta}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt},$$

per quanto non sia la soluzione generale, permetta agevolmente di generare tutte le soluzioni del problema al contorno, o di Cauchy, per la propagazione del calore in un filo illimitato, quando è specificato il valore della distribuzione di temperatura al tempo $t = 0$.

Prima di mostrare questo, facciamoci un'idea di che tipo di soluzione abbiamo. Posto $n = 1/(4Dt)$, riconosciamo in

$$(2) \quad K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}$$

un'approssimante regolare della delta: per $t \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), la funzione K diventa la delta di Dirac. Nel senso che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y, t) f(y) dy = f(y)$$

per ogni funzione f buona, cioè in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Quindi la soluzione \mathcal{T} trovata con i metodi dell'analisi dimensionale descrive la propagazione del tempo in cui tutto il calore Θ al tempo iniziale è concentrato in una sorgente puntiforme posta nell'origine.

La funzione $K = K(x, t)$ definita dalla (2) è detta *nucleo del calore* ("heat kernel") e interviene in una miriade di situazioni: dai processi stocastici (in particolare, il moto browniano), alla meccanica quantistica e alla teoria quantistica dei campi. Nel nostro caso, se consideriamo la convoluzione di $K(x, t)$ con una funzione $f_0(x)$ e formiamo la funzione

$$(3) \quad f(x, t) = K \star f_0(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y, t) f_0(y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4Dt} f_0(y) dy$$

raggiungiamo un triplice scopo:

- A. Otteniamo una classe più ampia di soluzioni di (1).
- B. Più precisamente, risolviamo completamente il problema di Cauchy di (1) per il dato iniziale $f(x, 0) = f_0(x)$, dove $f_0(x)$ è una funzione assegnata (possibilmente buona). Per queste soluzioni il calore totale Θ , anziché essere concentrato in un punto è “spalmato” su tutto \mathbb{R} , secondo la distribuzione iniziale di temperatura, e

$$\int |f(x, t)| dx = \int |f_0(x)| dx = \Theta$$

è preservato nel tempo.

- C. Come bonus, otteniamo la soluzione dell’equazione di Schrödinger di una particella libera in una dimensione.

Vediamo più in dettaglio questi punti.

- A. Se assumiamo che f_0 sia buona, possiamo scambiare senza problemi derivate e integrali. Poiché $K(x, t)$ è soluzione dell’equazione del calore anche

$$K \star f_0(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - y, t) f_0(y) dy$$

lo sarà (lo scambio vale anche per condizioni più deboli su f , ma adesso non vogliamo addentrarci in questo).

- B. Assumendo che la soluzione (1) sia unica (e lo è, ma non lo dimostriamo), $f(x, t)$ è la soluzione di (1) che converge al dato iniziale $f_0(x)$ per $t \downarrow 0$, in quanto, come abbiamo già mostrato, si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - y, t) f_0(y) dy = f_0(y).$$

- C. Per rotazione $t \rightarrow it$ nel piano complesso della variabile t , si ottiene

$$K(x, it) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D it}} e^{ix^2/4Dt} \stackrel{\text{def}}{=} G(x, t)$$

posto $D = \hbar/2m$ (come abbiamo già fatto per una particella in una scatola unidimensionale), si ottiene

$$(4) \quad G(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar it}} e^{imx^2/2\hbar t}$$

Si verifica facilmente per sostituzione che $\Psi(x, t) = G(x, t)$ è soluzione dell’equazione libera di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

Tuttavia, prima di dire che le cose sono esattamente come per l’equazione del calore, serve un po’ di cautela. Infatti, nella rotazione complessa si sono perse le proprietà di K come funzione buona: a differenza di K , la funzione G non è

buona e, al variare di t tendente a zero, non si ha più una successione regolare di approssimanti della delta. Si può tuttavia dimostrare che (ma per il momento non lo faremo)

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) \Psi_0(y) dy = \Psi_0(x).$$

Assodato questo, siamo nella stessa situazione di prima:

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) \Psi_0(y) dy$$

è la soluzione dell'equazione libera di Schrödinger per il dato iniziale $\Psi(x, 0) = \Psi_0(x)$.

ANALISI DI FOURIER

Risolviamo il problema al contorno

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f(x, 0) &= f_0(x) \end{aligned}$$

con i metodi dell'analisi di Fourier. Per comodità, lavoriamo con la convenzione $\textcircled{3}$ per la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} dk \end{aligned}$$

Allora la soluzione è data dallo schema:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} & \xleftarrow{\text{soluzione}} & f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_0(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk \\ \downarrow F & & \uparrow F^{-1} \\ \frac{\partial \widehat{f}(k, t)}{\partial t} = -Dk^2 \widehat{f}(k, t) & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \widehat{f}(k, t) = \widehat{f}_0(k) e^{-Dk^2 t} \end{array}$$

Possiamo adesso usare la trasformata inversa del dato iniziale e ottenere

$$\begin{aligned}
 f(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_0(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(y) e^{-iky} dy \right] e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk^2 t} e^{-ik(y-x)} dk \right] f_0(y) dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4Dt}} \right] f_0(y) dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4Dt} f_0(y) dy
 \end{aligned}$$

in accordo con quanto già trovato.

19.1.2. *Oscillazioni di temperatura nel suolo.*

È dato il problema al contorno per lo studio della propagazione del calore nel suolo ($x = 0$ è il livello del suolo, $x > 0$ misura la profondità):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{per } 0 < x < 3, t > 0 \\ T(0, t) = Ae^{i\omega t} \quad (\text{parte reale del secondo membro se } T \text{ temperatura}) \\ T(x, t) \quad \text{funzione limitata in } x \text{ e } t \end{array} \right.$$

Si cerchi una soluzione del tipo

$$T = u(x)e^{i\omega t}$$

allora

$$Du''(x) = i\omega u(x)$$

che ha soluzione

$$u(x) = c_1 e^{\sqrt{i\frac{\omega}{D}}x} + c_2 e^{-\sqrt{i\frac{\omega}{D}}x}.$$

per

$$\sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \cos \pi/4 + i \sin(\pi/4) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

Dunque

$$u(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x}$$

Le costanti c_1 e c_2 si determinano imponendo le condizioni al contorno: u deve essere limitata per $x \rightarrow \infty$ e deve valere $T(0, t) = Ae^{i\omega t}$, quindi deve essere $u(0) = A$. Si ha così $c_1 = 0$ e $c_2 = A$ e quindi

$$T(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x} e^{i\omega t} = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} e^{i\omega\left(t - \frac{1}{\sqrt{2D\omega}}x\right)}$$

Passando alla parte reale (poiché T è una temperatura)

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} \cos\left(t - \frac{1}{\sqrt{2D\omega}}x\right)$$

Ne risulta che la temperatura T ad una qualsiasi profondità x è una funzione sinusoidale di t con ampiezza

$$Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}$$

minore dell'ampiezza A in superficie, e la riduzione è tanto maggiore quanto maggiore è la profondità e quanto maggiore è la frequenza delle oscillazioni. La fase varia da punto a punto e, precisamente, le oscillazioni si risentono verso l'interno con un ritardo $x/(\sqrt{2D\omega})$ proporzionale alla distanza x dalla superficie, cosa che si può esprimere dicendo che *le oscillazioni di temperatura si propagano nell'interno con una velocità $\sqrt{2D\omega}$ (tanto maggiore quindi quanto maggiore è la frequenza ω)*. Ne deriva, in particolare che per $x = \pi\sqrt{2D\omega}$ le oscillazioni sono in opposizione di fase con quelle in superficie.

Poiché il problema è lineare, se al suolo sono presenti due oscillazioni di frequenza ω_1 e ω_2 , la temperatura sarà la sovrapposizione lineare delle temperature per le due oscillazioni. Questo permette di confrontare le variazioni diurne e stagionali. Si trova così che l'assorbimento e la velocità di propagazione delle oscillazioni diurne sono maggiori di quelle annue. Ad esempio, per un ordinario terreno umido ($D = 0.0049\text{cm}^2/\text{s}$) un'escursione diurna di 20° , si riduce a 0.86° a soli 36 cm di profondità (dove le oscillazioni sono opposte a quelle superficiali) e a 0.004° ad un metro. Un'escursione annua di 20° , invece, si ridurrebbe a 17.5° a 30 cm, a 12.7° ad un metro e a 0.2° a 10 metri (a tale profondità si può dunque ritenere che la temperatura resti costante nel passaggio dall'estate all'inverno). È interessante osservare che la teoria (già sviluppata da Fourier) predice che ad una profondità di 2-3 metri circa le oscillazioni della temperatura sono in opposizione di fase di circa sei mesi (la temperatura nel terreno sarà più calda in inverno e più fredda in estate). Il che spiega perchè conviene avere la cantina di qualche metro sotto il livello del suolo.

19.1.3. *Legge dei grandi numeri e limite centrale.*

Supponete di lanciare due dadi. La probabilità che la somma sia 7 è

$$p(7) = p(1)p(7-1) + p(2)p(7-2) + p(3)p(7-3) + p(4)p(7-4) + p(5)p(7-5) + p(6)p(7-6)$$

Questa regola è del tutto generale: la probabilità della somma di due variabili casuali indipendenti, con distribuzioni di probabilità $f(x)$ e $g(y)$ rispettivamente, è il prodotto di convoluzione delle due distribuzioni di probabilità

$$f \star g(x) = \int f(x)g(x-y)dy$$

Se sommate N variabili casuali indipendenti, tutte con la stessa distribuzione di probabilità, la distribuzione della somma è

$$p \underbrace{\star \dots \star}_N p(x) = p^{\star N}(x)$$

D'ora in poi, per semplicità, assumeremo che p sia a media zero,

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = m = 0$$

Se moltiplicate per α una variabile casuale X con distribuzione $f(x)$, e formate la variabile casuale $Y = \alpha X$, la distribuzione di Y è $(1/\alpha)f(x/\alpha)$. Quindi, se dividete per N la somma di N variabili casuali indipendenti X_i , tutte con la stessa distribuzione $p(x)$, questa variabile casuale,

$$\frac{X_1 + \dots + X_N}{N},$$

detta *media empirica*, ha distribuzione

$$Np^{\star N}(Nx).$$

Per determinare l'andamento asintotico per N grande della distribuzione della media empirica, prendiamone la trasformata di Fourier

$$N \frac{1}{N} \widehat{p}(k/N)^N = \widehat{p}(k/N)^N,$$

dove, assumendo la convenzione ②,

$$\widehat{p}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{-ikx} dx$$

Non è difficile vedere che $\widehat{p}(k/N)^N$ tende ad un valore costante e che quindi $p(x)$ tende a concentrarsi nello zero (abbiamo assunto che p fosse a media zero). Dimostriamo questo fatto, mostrando un risultato più specifico: che le fluttuazioni statistiche attorno allo zero sono di ordine $1/\sqrt{N}$. Cioè, dimostriamo che la distribuzione di

$$Y_N = \frac{X_1 + \dots + X_N}{\sqrt{N}},$$

quando X_i sono variabili casuali indipendenti, converge ad una gaussiana a media zero e varianza uguale a quella delle X_i (assunte tutte distribuite nello stesso modo), a media $m = 0$ e varianza

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

La distribuzione di Y_N è

$$\sqrt{N}p^{\star N}(\sqrt{N}x)$$

Passiamo alla sua trasformata di Fourier che è

$$g_N(k) = \widehat{p}\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)^N$$

Poiché siamo interessati al limite di N grande di $g_N(k)$, studiamo l'asintotica del suo logaritmo

$$\ln g_N(k) = N \ln \widehat{p}\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right).$$

Adesso sviluppiamo in serie l'argomento del logaritmo:

$$\ln g_N(k) = N \ln \left[\widehat{p}(0) + \widehat{p}'(0) \frac{k}{\sqrt{N}} + \frac{1}{2} \widehat{p}''(0) \frac{k^2}{N} + \dots \right].$$

Adesso osserviamo che

$$\begin{aligned} \widehat{p}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-ikx} dx \Big|_{k=0} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (\text{perché è una distribuzione di probabilità}) \\ \widehat{p}'(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) (-ix) e^{-ikx} dx \Big|_{k=0} = -i \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = -im = 0 \quad (\text{media zero per ipotesi}) \\ \widehat{p}''(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) (-x^2) e^{-ikx} dx \Big|_{k=0} = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = -\sigma^2 \quad (\text{varianza}) \end{aligned}$$

Allora

$$\ln g_N(k) = N \ln \left[1 - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{k^2}{N} + \dots \right] \approx N \left[-\frac{1}{2} \sigma^2 \frac{k^2}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \right].$$

Quindi, nel limite $N \rightarrow \infty$,

$$g_N(k) \rightarrow g_*(k) = e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 k^2}$$

che è proprio la trasformata di Fourier di

$$\mathcal{N}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},$$

cioè la distribuzione normale (gaussiana) a media 0 e varianza σ^2 . Risulta così dimostrato il teorema del limite centrale.