

20.1. **La trasformata di Fourier esce dal paradiso e va in L^2 .**

Per comodità, lavoriamo con la convenzione ③ per la trasformata di Fourier:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} dk$$

A meno che non sia altrimenti specificato, assumeremo che tutte le funzioni siano buone.

20.1.1. **Calcolo operatoriale.**

Lo studio delle proprietà della trasformata di Fourier della lezione 18.2 può essere così riassunto. Data un'operazione lineare¹ A nel dominio spaziale, si ha una corrispondente operazione \widehat{A} nel dominio delle frequenze, che può essere espressa in termini del diagramma

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{A} & (Af)(x) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ \widehat{f}(k) & \xrightarrow{\widehat{A}} & (\widehat{Af})(k) \end{array}$$

Dunque, per trovare l'azione di \widehat{A} su una generica funzione $g(k)$ nel dominio delle frequenze, si calcola

$$\widehat{A} = FAF^{-1}$$

il cui significato è: si prenda una generica funzione g nel dominio delle frequenze e la si porti nel dominio spaziale con F^{-1} , quindi si effettui l'operazione A , e infine si torni indietro con F , cioè

$$(\widehat{A}g)(k) = (FAF^{-1}g)(k)$$

Viceversa, data un'operazione lineare B nel dominio delle frequenze, per trovare l'operazione B^\vee nel dominio spaziale, si deve calcolare

$$B^\vee = F^{-1}BF$$

cioè, B^\vee è definito dall'operazione

$$(B^\vee f)(x) = (F^{-1}BFf)(x)$$

su una generica $f(x)$ nel dominio spaziale.

Esercizio 1. Si consideri l'operazione Q di moltiplicazione per l'argomento della funzione nel dominio spaziale,

$$(Qf)(x) = xf(x)$$

Trovare \widehat{Q} .

¹O anti-lineare: abbiamo anche visto l'operazione di coniugazione complessa \mathcal{C} .

Risp.

$$\begin{aligned}
 (\widehat{Q}g)(k) &= (FQF^{-1}g)(k) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [xg^\vee(x)] e^{-ikx} dx, \quad g^\vee(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx} dk \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g^\vee(x) \left[i \frac{d}{dk} \right] (e^{-ikx}) dx \\
 &= \left[i \frac{d}{dk} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g^\vee(x) e^{-ikx} dx \\
 &= i \frac{d}{dk} g(k)
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\widehat{Q} = i \frac{d}{dk}$$

□

Esercizio 2. Trovare \widehat{D} , dove D è l'operazione di derivazione

$$(Df)(x) = \frac{df}{dx} = f'(x)$$

Risp. L'esercizio è già stato svolto nella lezione 18.2:

$$(\widehat{D}g)(k) = ikg(k) = (iQg)(k)$$

□

Riassumendo,

$$\begin{array}{ccc}
 f(x) & \xrightarrow{Q} & xf(x) & & f(x) & \xrightarrow{D} & f'(x) \\
 \downarrow F & & \downarrow F & \text{e} & \downarrow F & & \downarrow F \\
 \widehat{f}(k) & \xrightarrow{\widehat{Q}=iD} & i\widehat{f}(k) & & \widehat{f}(k) & \xrightarrow{\widehat{D}=iQ} & ik\widehat{f}(k)
 \end{array}$$

Si osservi che, correttamente, indichiamo stesse operazioni con lo stesso simbolo : Q è la moltiplicazione per l'argomento della funzione e D è la derivata della funzione, non importa quale sia il nome del suo argomento.

Esercizio 3. Sia $A = Q - D$. Trovare \widehat{A} .

Risp. La trasformata F è lineare, dunque

$$\widehat{A} = \widehat{Q} - \widehat{D} = iD - iQ = -i(Q - D)$$

cioè

$$\widehat{A} = -iA$$

□

Esercizio 4. Siano A e B operazione lineari, dimostrare che $\widehat{AB} = \widehat{A}\widehat{B}$.

Dim.

$$\widehat{AB} = FABF^{-1} = FAF^{-1}FBF^{-1} = \widehat{A}\widehat{B}$$

□

Dunque, in particolare

$$\widehat{A^2} = (\widehat{A})^2$$

e, per induzione, si dimostra facilmente che

$$\widehat{A^n} = \widehat{A}^n$$

per n intero.

Riassumendo, se pensiamo all'insieme delle operazioni lineari come ad un'algebra con addizione e moltiplicazione, la trasformata di Fourier F realizza un isomorfismo di algebre:

$$\begin{aligned} A + B &\longleftrightarrow \widehat{A} + \widehat{B} \\ AB &\longleftrightarrow \widehat{A}\widehat{B} \\ A^n &\longleftrightarrow \widehat{A}^n \end{aligned}$$

(naturalmente, la trasformata dell'operazione identità I è ancora l'identità I).

Esercizio 5. Determinare $\widehat{A^n}$ per l'operazione $A = (Q - D)$ dell'esercizio 3.

Risp. Per le proprietà algebriche appena viste e per l'ultima formula ottenuta nell'esercizio 3, si ha

$$\widehat{A^n} = (\widehat{A})^n = (-i)^n A^n$$

□

Esercizio 6. Sia V l'operazione di moltiplicazione per la funzione $v(x)$ nel dominio spaziale. Qual è l'operazione \widehat{V} nel dominio delle frequenze?

Risp. Lo abbiamo già visto nella lezione 18.2.: Se $Vf(x) = v(x)f(x)$ allora²

$$\widehat{V}f(k) = \widehat{v} \star \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(k-u)\widehat{f}(u)du$$

cioè

$$\widehat{V} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{v} \star$$

□

Esercizio 7. Sia $v(x) = x^n$. Per l'esercizio precedente, $\widehat{V} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{v} \star$, ma per quanto visto negli esercizi precedenti, $V = Q^n$ e dunque

$$\widehat{V} = (iD)^n.$$

Spiegare.

²Adesso compare un fattore $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ moltiplicativo, poiché a desso stiamo usando la convenzione

③ per la trasformata di Fourier.

Risp. $v(x) = x^n$ non ammette una trasformata di Fourier e quindi non ci sarebbe niente da spiegare. Tuttavia, possiamo interpretare la sua trasformata come una funzione generalizzata e convincerci che le due formule sono compatibili. Per determinare quale funzione generalizzata sia, usiamo un ammorbidente $e^{-\epsilon x^2}$ e consideriamo la versione ammorbidita della trasformata di Fourier di $v(x) = x^n$, cioè

$$\begin{aligned}\widehat{v}_\epsilon(k) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2} x^n e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (i)^n \frac{d^n}{dk^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (i)^n \frac{d^n}{dk^n} \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} e^{-k^2/(4\epsilon)} \\ &= \sqrt{2\pi} (i)^n \frac{d^n}{dk^n} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon}} e^{-k^2/(4\epsilon)}\end{aligned}$$

Riconosciamo a secondo membro una successione regolare di approssimanti della delta ponendo $m \stackrel{\text{def}}{=} 1/(4\epsilon)$ e considerando $m \rightarrow \infty$ corrispondente a $\epsilon \rightarrow 0$. Allora

$$\begin{aligned}\widehat{v}_\epsilon \star \widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} (i)^n \frac{d^n}{dk^n} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon}} e^{-(k-u)^2/(4\epsilon)} \widehat{f}(u) du \\ &= (i)^n \frac{d^n}{dk^n} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon}} e^{-(k-u)^2/(4\epsilon)} \widehat{f}(u) du \\ &\stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{=} (i)^n \frac{d^n}{dk^n} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k-u) \widehat{f}(u) du \\ &= (i)^n \frac{d^n}{dk^n} \widehat{f}(k)\end{aligned}$$

che è proprio $\widehat{V} = (iD)^n$.

□

Esercizio 8. *Scrivere l'equazione (di Schrödinger)*

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + v(x) f(x)$$

nello spazio dei momenti (o numeri d'onda). Si consideri in particolare il caso dell'oscillatore armonico $v(x) = \frac{1}{2}x^2$ per cui si ha

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2} x^2 f$$

Risp. L'operazione a secondo membro sulla f è usualmente chiamata Hamiltoniana e denotata con H . Con le notazioni precedentemente introdotte

$$H = -\frac{1}{2}D^2 + V$$

Allora

$$\begin{aligned}\widehat{H} &\stackrel{\text{def}}{=} FHF^{-1} \\ &= -\frac{1}{2}(iQ)^2 + \widehat{V} \\ &= \frac{1}{2}Q^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{v}\star\end{aligned}$$

e quindi

$$i\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t} = \frac{k^2}{2}\widehat{f} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(k-u)\widehat{f}(u)du$$

Per l'oscillatore armonico $\widehat{V} = Q^2$ si ha

$$H_{\text{ho}} = -\frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{2}Q^2$$

Dunque

$$\widehat{H}_{\text{ho}} = +\frac{1}{2}Q^2 - \frac{1}{2}D^2 = H_{\text{ho}}$$

e quindi

$$i\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t} = \frac{1}{2}k^2\widehat{f} - \frac{1}{2}\frac{\partial \widehat{f}^2}{\partial k^2}$$

□

Da sottolineare il fatto notevole che l'operatore H_{ho} mantiene la stessa forma nel dominio dei numeri d'onda: $\widehat{H}_{\text{ho}} \stackrel{\text{def}}{=} FH_{\text{ho}}F^{-1} = H_{\text{ho}}$.

Le operazioni (o gli operatori) formano un'algebra non commutativa e molta cautela è richiesta nella loro manipolazione algebrica. Nel prossimo esercizio studiamo l'esponenziale di un operatore.

Esercizio 9 (Esponenziale di un operatore). *La definizione formale di esponenziale di un operatore A è*

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

(assumendo che la serie converga in una norma opportuna). Sulla base di questa definizione, mostrare che

$$e^{aQ}f(x) = e^{ax}f(x), \quad e^{bD}f(x) = \tau_{-b}f(x) = f(x+b),$$

dove τ è l'operazione di traslazione introdotta nella lezione 18.2

Risp.:

$$\begin{aligned} e^{aQ} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n Q^n f(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n x^n f(x) \\ &= e^{ax} f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{bD} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} b^n D^n f(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) b^n \quad (= \text{espansione in serie di Taylor di } f \text{ in } x \text{ con incremento } b) \\ &= f(x + b) \end{aligned}$$

□

Esercizio 10 (formula di Campbell-Baker-Hausdorff). *Siano A e B due operatori tali che il loro commutatore $[A, B]$ sia un numero complesso c , cioè,*

$$[A, B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA = c.$$

Dimostrare le formule

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-c/2} = e^B e^A e^{c/2}$$

Risp. La dimostrazione è un po' macchinosa, ma istruttiva per far pratica con il calcolo operatoriale. Preliminarmente, mostriamo che

$$S(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{tA} B e^{-tA} = B + ct$$

Deriviamo il primo membro

$$\frac{dS}{dt} = e^{tA} A B e^{-tA} + e^{tA} B (-A) e^{-tA} = e^{tA} (AB - BA) e^{-tA} = c$$

da cui $S(t) = ct + S(0)$. Ma $S(0) = B$ e quindi la formula risulta dimostrata. Adesso si definisca

$$G(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{t(A+B)} e^{-tA}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \frac{d}{dt} [e^{t(A+B)}] e^{-tA} + e^{t(A+B)} \frac{d}{dt} [e^{-tA}] \\ &= (A + B) e^{t(A+B)} e^{-tA} - e^{t(A+B)} A e^{-tA} \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
 G(t)^{-1} \frac{dG}{dt} &= [e^A e^{-t(A+B)}] [(A+B)e^{t(A+B)} e^{-tA} - e^{t(A+B)} A e^{-tA}] \\
 &= e^{tA} (A+B) e^{-tA} - e^{tA} A e^{-tA} \\
 &= e^{tA} B e^{-tA} \\
 &= B + ct
 \end{aligned}$$

In altre parole, abbiamo mostrato che $G(t) = e^{t(A+B)} e^{-tA}$ è soluzione di

$$\frac{dG}{dt} = G(B + ct) \quad G(0) = I$$

D'altro canto, la soluzione di questa equazione è

$$G(t) = e^{Bt} e^{\frac{1}{2}ct^2}$$

come si verifica facilmente derivando il secondo membro. Allora deve essere

$$e^{t(A+B)} e^{-tA} = e^{Bt} e^{\frac{1}{2}ct^2}$$

per ogni t . Per $t = 1$ si ottiene

$$e^{A+B} e^{-A} = e^B e^{c/2} \implies e^{A+B} = e^B e^A e^{c/2}$$

e per $t = -1$,

$$e^{-(A+B)} e^A = e^{-B} e^{c/2} \implies e^{A+B} = e^A e^B e^{-c/2}$$

che sono proprio le formule che si voleva dimostrare. □

Esercizio 11. Determinare l'azione dell'operatore

$$e^{t(Q-D)}$$

su una funzione $f(x)$.

Risp.. In primo luogo, osserviamo che

$$\begin{aligned}
 [Q, -D]f(x) &= (Q(-D) - (-D)Q)f(x) \\
 &= (-QD + DQ)f(x) \\
 &= -x \frac{df}{dx} + \frac{d}{dx}(xf(x)) \\
 &= -x \frac{df}{dx} + x \frac{df}{dx} + f(x) \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

Quindi

$$[Q, -D] = I$$

e possiamo applicare la formula dell'esercizio 10 per $A = tQ$, $B = -tD$ e $c = t^2$.
Dunque

$$\begin{aligned} e^{t(Q-D)} f(x) &= e^{tQ} e^{-tD} e^{-t^2/2} f(x) \quad (\text{per l'esercizio 10}) \\ &= e^{-t^2/2} e^{tx} f(x-t) \quad (\text{per l'esercizio 9}) \end{aligned}$$

□

20.1.2. *Le funzioni di Hermite.*

Le funzioni di Hermite (non normalizzate) sono definite dall'equazione

$$\phi_n(x) = \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2}$$

e sono ortogonali in $L^2(\mathbb{R})$ (per esercizio: verificare).³ La loro funzione generatrice è

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (\text{per definizione di funzione generatrice}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (Q - D)^n e^{-x^2/2} \frac{t^n}{n!} \quad (\text{per definizione delle funzioni di Hermite}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tQ - tD)^n e^{-x^2/2} \\ &= e^{t(Q-D)} e^{-x^2/2} \quad (\text{per la definizione di esponenziale di un operatore}) \\ &= e^{-t^2/2} e^{tx} e^{-(x-t)^2/2} \quad (\text{per l'esercizio 11}) \\ &= e^{-t^2+2tx-x^2/2} \end{aligned}$$

I polinomi di Hermite sono dati dalla formula

$$H_n(x) = e^{x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2}$$

e quindi hanno funzione generatrice

$$e^{x^2/2} G(x, t) = e^{-t^2+2tx} \stackrel{\text{def}}{=} g(x)$$

³Non sono normalizzate: per avere un sistema ortonormale occorre moltiplicarle per

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt[4]{\frac{1}{\pi}}$$

Ecco i primi cinque:

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= 2x \\ H_2 &= 4x^2 - 2 \\ H_3 &= 8x^3 - 12x \\ H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \end{aligned}$$

Esercizio 12. Verificare che $\phi_0(x) = e^{-x^2/2}$ è un'autofunzione di F con autovalore 1.

Risp.:

$$\begin{aligned} F\phi_0(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{1/2}} e^{-k^2/(4(1/2))} \quad (\text{ricordando che } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/(4a)}) \\ &= e^{-k^2/2} \\ &= \phi_0(k) \end{aligned}$$

Esercizio 13. Dimostrare che le funzioni di Hermite sono multipli costanti delle loro trasformate di Fourier. Più precisamente, dimostrare che le funzioni di Hermite ϕ_n sono autovettori della trasformata di Fourier F con autovalori $(-i)^n$.

Risp. Basta calcolare $F\phi_n$:

$$\begin{aligned} F\phi_n(k) &= F[(Q - D)^n \phi_0](k) \quad (\text{per la definizione di funzioni di Hermite}) \\ &= [F(Q - D)^n F^{-1} F \phi_0](k) \quad (\text{inserita l'identità } FF^{-1} = I) \\ &= [F(Q - D)^n F^{-1} \phi_0](k) \quad (\text{per l'esercizio 12}) \\ &= (-i)^n (Q - D)^n \phi_0(k) \quad (\text{per l'esercizio 5}) \\ &= (-i)^n \phi_n(k) \quad (\text{per la definizione di funzioni di Hermite}) \\ &= e^{-ni\pi/2} \phi_n(k) \end{aligned}$$

□

Esercizio 14. Dimostrare che le funzioni di Hermite formano un sistema ortogonale completo in $L^2(\mathbb{R})$.

Dim. La dimostrazione di questo teorema è particolarmente istruttiva perché è un punto d'incontro tra analisi complessa, spazi funzionali e trasformata di Fourier.

Nella lezione 13.1 abbiamo visto che un sistema ortogonale è completo se e solo se è chiuso (teorema 4). E un sistema ortogonale è chiuso se non esiste alcun vettore non nullo nello spazio di Hilbert che sia ortogonale a tutti gli elementi del

sistema. In altre parole, un sistema $\{\mathbf{e}_n\}$ è chiuso se dalle relazioni

$$\langle \mathbf{e}_n | \mathbf{u} \rangle = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

segue che $\mathbf{u} = 0$. Adesso vogliamo mostrare che le funzioni di Hermite sono un sistema ortogonale chiuso in $L^2(\mathbb{R})$. A tal fine è sufficiente mostrare che se

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^n f(x) dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

allora $f(x)$ deve essere la funzione nulla.

Consideriamo la funzione

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^n f(x) e^{-izx} dx$$

come funzione della variabile complessa z . L'integrale converge assolutamente e uniformemente in ogni regione finita del piano complesso. Quindi $F(z)$ non ha singolarità e deve essere una funzione intera. In altre parole, possiamo rappresentare $F(z)$ in serie di potenze,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

e il raggio di convergenza della serie deve essere infinito. Allora

$$c_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} i^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^n f(x) dx = 0$$

per ipotesi. Ne segue che

$$F(z) = 0$$

Poiché la trasformata di Fourier inversa della funzione nulla è nulla⁴ si ha

$$e^{-x^2/2} x^n f(x) = 0 \implies f(x) = 0,$$

che è proprio quel che occorre dimostrare per dimostrare che le funzioni di Hermite formano un sistema ortogonale chiuso. \square

In conclusione, previa normalizzazione a 1, le funzioni di Hermite formano una base ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$.

20.1.3. *Estensione della trasformata di Fourier a L^2 : teorema di Wiener.*

Mettendo insieme tutti i pezzi, in particolare gli ultimi due esercizi, arriviamo a un risultato che Norbert Wiener ottenne negli anni 30 del secolo scorso (finalmente un po' di matematica del 900!). Ecco come mettere insieme i tasselli:

- (a) Sia $|n\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \phi_n / \|\phi_n\|$ $n = 0, 1, 2, \dots$ la base ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$ delle funzioni di Hermite.

⁴A volere essere pignoli, nella lezione 18.2.4 abbiamo dimostrato la formula di inversione senza dimostrarne l'unicità. C'è comunque unicità e non è difficile (per quanto non banale) dimostrarlo.

(b) Qualunque funzione in $L^2(\mathbb{R})$ può essere decomposta nella base $\{|n\rangle\}$:

$$|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|f\rangle$$

(c) Per l'esercizio 13 è nota l'azione di F sui vettori della base $\{|n\rangle\}$:

$$F|n\rangle = e^{-ni\frac{\pi}{2}}|n\rangle$$

(d) Quindi F può essere estesa per linearità a tutto lo spazio $L^2(\mathbb{R})$:

$$F|f\rangle = F \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F|n\rangle \langle n|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ni\frac{\pi}{2}} |n\rangle \langle n|f\rangle$$

Fine. □

Naturalmente, quando dobbiamo calcolare Ff useremo la sua rappresentazione integrale usuale

$$Ff(k) = \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

È però utile sapere che questa rappresentazione integrale è del tutto equivalente alla rappresentazione come serie

$$Ff(k) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\phi_n(k)}{\|\phi_n\|} e^{-ni\frac{\pi}{2}} \quad \text{dove} \quad c_n = \langle n|f\rangle$$

20.1.4. *L'oscillatore armonico quantistico.*

Le funzioni normalizzate di Hermite $|n\rangle$ sono anche gli autovettori dell'operatore

$$H_{\text{ho}} = \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} \left(x - \frac{d}{dx} \right) \left(x + \frac{d}{dx} \right).$$

con autovalori $n = 0, 1, 2, \dots$. L'operatore H_{ho} è l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico (con tutte le costanti poste uguali a 1) a cui (per comodità) è stata sottratta l'energia $1/2$ dello stato fondamentale.

Si vuole costruire la soluzione generale dell'equazione

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = H_{\text{ho}} \psi(x, t) \quad (\star)$$

con condizione iniziale

$$\psi(x, 0) = f(x).$$

In altre parole, si vuole costruire l'operatore lineare che trasforma il dato iniziale f nello stato ψ al tempo t . Chiamiamo U_t tale operatore, cioè

$$U_t f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x, t)$$

Conosciamo l'azione di U_t sulle funzioni di Hermite:

$$U_t \phi_n(x, t) = e^{-int} \phi_n(x, t)$$

Osserviamo che U_t conserva la norma e l'ortogonalità delle funzioni di Hermite ed è invertibile.

Costruire la soluzione generale dell'equazione (\star) è allora equivalente ad estendere per linearità U_t a tutto $L^2(\mathbb{R})$. Per ottenere questo, possiamo ripetere gli stessi passi di prima.

(a) Sia $|n\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \phi_n / \|\phi_n\|$ $n = 0, 1, 2, \dots$ la base ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$ delle funzioni di Hermite.

(b) Qualunque funzione in $L^2(\mathbb{R})$ può essere decomposta nella base $\{|n\rangle\}$:

$$|f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n | f \rangle$$

(c) È nota l'azione di U_t sui vettori della base $\{|n\rangle\}$:

$$U_t |n\rangle = e^{-int} |n\rangle$$

(d) Quindi U_t può essere esteso per linearità a tutto lo spazio $L^2(\mathbb{R})$:

$$(1) \quad U_t |f\rangle = U_t \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n | f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} U_t |n\rangle \langle n | f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-int} |n\rangle \langle n | f \rangle$$

Fine. La soluzione di (\star) per dato iniziale $f \in L^2(\mathbb{R})$ è

$$|\psi_t\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-int} |n\rangle \langle n | f \rangle$$

e U_t risulta essere un operatore unitario in L^2 .

Esercizio 15 (per casa). *Dimostrare (formalmente) che U_t è unitario e che $U_t = e^{-itH_{ho}}$.*

20.1.5. La trasformata di Fourier frazionaria.

Sorprendentemente, la trasformata di Fourier non è altro che l'evoluzione temporale dell'oscillatore armonico quantistico calcolata dopo un quarto di periodo! Infatti,

$$U_{\frac{\pi}{2}} |f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ni\frac{\pi}{2}} |n\rangle \langle n | f \rangle = F |f\rangle$$

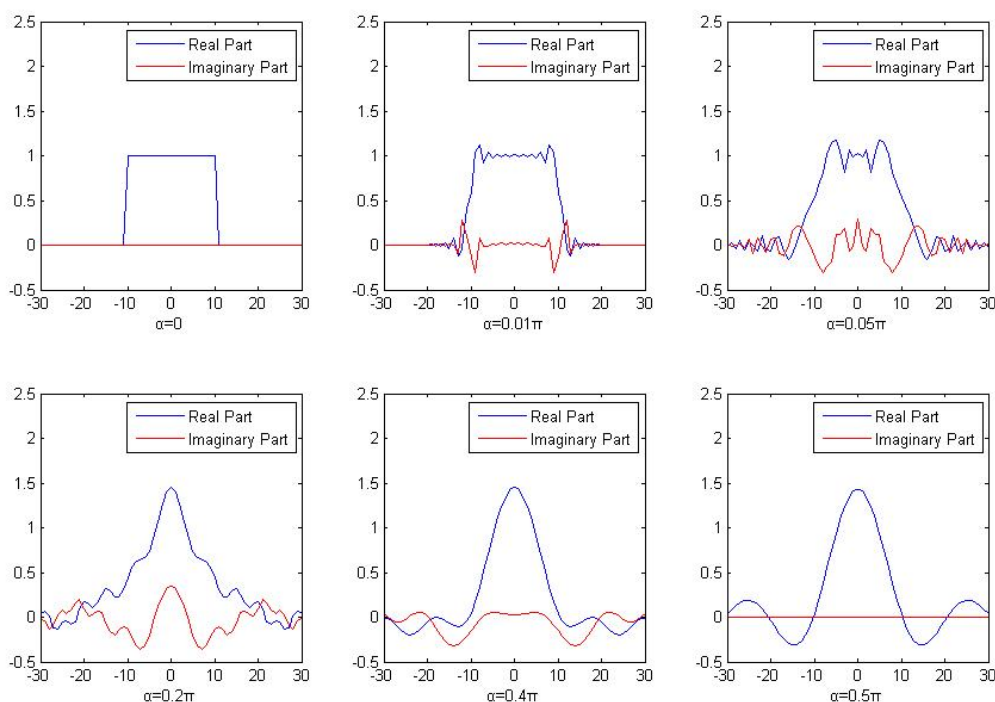
Se potessimo superare tutti i problemi legati alla difficoltà di codificare, manipolare e recuperare l'informazione contenuta nello stato di un sistema quantistico (oggetto di studio della computazione quantistica), avremmo un sistema fisico concreto per fare trasformate di Fourier: basterebbe preparare un oscillatore armonico nello stato iniziale f e leggere lo stato del sistema dopo un tempo pari ad un quarto di periodo e avere così la trasformata di Fourier di f . Tutto ciò è molto irrealistico. Inoltre, come vedremo nelle ultime lezioni del corso sull'analisi asintotica, abbiamo già sistemi fisici (anche classici, ottici soprattutto) che come effetto della loro evoluzione temporale producono la trasformata di Fourier del dato iniziale.

Sia come sia, questo legame tra oscillatore armonico quantistico e trasformata di Fourier è interessante. Nasce spontanea la domanda: *che cosa ha di speciale un quarto di periodo? Perché non un ottavo o tre quinti?*

Motivati da questa domanda (a cui, peraltro, non saprei come rispondere), alcuni ricercatori, nelle ultime decine d'anni (finalmente matematica del 2000!), si sono posti il problema di studiare trasformate di Fourier frazionarie

$$F^\alpha |f\rangle \stackrel{\text{def}}{=} U_\alpha |f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nia} |n\rangle \langle n | f\rangle .$$

dove α è un numero reale, e di applicare tali trasformate allo studio dei segnali per migliorare le tecniche tradizionali di analisi. Non conosco abbastanza la materia per dire se questo sia uno sviluppo interessante e utile dell'analisi armonica classica. La letteratura al riguardo (articoli e libri) è in crescita (ma questo al giorno d'oggi non vuol dire, di per sé, un granché). Sia come sia, un'analisi frazionaria, dà una descrizione del segnale in domini intermedi tra il puro dominio temporale e quello in frequenza. Ecco una figura (presa da Wikipedia) dell'analisi frazionaria della funzione di scatola⁵:



L'ultima è la sinc; per valori di α tra 0 e $\pi/2$, ci sono rappresentazioni intermedie del segnale tra la scatola e la sinc.

⁵Si osservi che la figura può anche essere vista come una successione di fotogrammi dell'evoluzione temporale, secondo la dinamica dell'oscillatore armonico quantistico, di una funzione d'onda iniziale "scatola", tra il tempo $t = 0$ e il tempo uguale a $\pi/2$ (un quarto di periodo).