

21.1. Proprietà di analiticità della trasformata di Fourier.

In questa lezione, per comodità, lavoriamo con la convenzione ② per la trasformata di Fourier:

$$(1) \quad \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt$$

$$(2) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega$$

Si osservi anche lo scambio di segni degli esponenziali nella definizione della trasformata e nella formula di inversione, nonché l'uso delle variabili ω e t . Abbiamo in mente applicazioni a segnali dipendenti dal tempo e ad analisi in frequenza degli stessi. Inoltre, abbiamo in mente applicazioni a funzioni $f(x, t)$, dello spazio e del tempo di cui intendiamo considerare la trasformata di Fourier sia nello spazio sia nel tempo. In questi casi la convenzione usata in fisica corrisponde a un cambiamento di segno nella definizione di trasformata di Fourier temporale rispetto a quella spaziale: la ragione è che, fisicamente si pensa all'analisi di Fourier come ad una sovrapposizione di treni d'onda elementari

$$e^{i(kx - \omega t)},$$

ciascuno dei quali rappresenta un'onda piana, di frequenza ω e numero d'onda k , che si muove nella direzione positiva dell'asse delle x , per cui

$$f(x, t) = \sum A_{k,\omega} e^{i(kx - \omega t)}$$

21.1.1. Teorema di Plancherel.

Facciamo il punto. Nell'ultima lezione abbiamo mostrato che la trasformata di Fourier, originariamente definita per funzioni buone, è estendibile ad un operatore unitario F in $L^2(\mathbb{R})$. Abbiamo ottenuto questo risultato con il metodo di Wiener, basato sulle funzioni di Hermite. Lo stesso risultato era stato ottenuto con altri metodi da Plancherel nel 1910, una ventina d'anni prima del risultato di Wiener ed è usualmente noto nella letteratura come teorema di Plancherel. Poichè F è unitario, vale l'identità di Parseval-Plancherel in L^2 che, nella convenzione ②, è

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

21.1.2. Trasformate di Fourier analitiche.

Quando nell'esercizio 14 della lezione 20.1 abbiamo mostrato la completezza delle funzioni di Hermite, abbiamo usato il fatto che

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^n f(x) e^{-izx} dx$$

è una funzione analitica e, in particolare, che è una funzione intera, cioè una funzione analitica in tutto il piano complesso eccetto il punto all'infinito. A sostegno di questo, abbiamo detto che l'integrale

$$\int_{-L}^L e^{-x^2/2} x^n f(x) e^{-izx} dx$$

nel limite $L \rightarrow \infty$ è assolutamente e uniformemente convergente per qualunque valore di z nel piano complesso.

In questa lezione vogliamo occuparci delle proprietà di analiticità della trasformata di Fourier $\widehat{f}(\omega)$ data dalla (1) estesa per continuamento analitico nel piano complesso $z = \omega + i\sigma$ ad una funzione

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{izt} dt$$

tale che

$$g(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

Frequentemente, $\widehat{f}(\omega)$ può essere estesa ad una funzione che è analitica in una certa regione del piano. Per esempio, se $f(t) = e^{-|t|}$ allora

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

che si estende alla funzione meromorfa

$$g(z) = \frac{1}{1 + z^2}.$$

Questo non dovrebbe sorprendere più di tanto: per ogni reale t , la funzione e^{itz} che compare sotto il segno di integrale è una funzione intera, e quindi ci si aspetta che ci siano delle condizioni su f per cui \widehat{f} sarà analitica in certe regioni del piano complesso.

Caratterizzeremo due classi di funzioni analitiche che emergono in questo modo e che giocano un ruolo importante in fisica.

21.1.3. *Funzioni nulle nel passato.*

Per la prima classe, sia $f(t)$ una qualunque funzione in $L^2(-\infty, \infty)$ che si annulla in $(-\infty, 0)$. Per brevità, chiameremo una funzione di questo “nulla nel passato”.

Sia

$$(4) \quad \widehat{f}(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{itz} dt \quad \text{per } z \in \Pi^+$$

dove Π^+ è il semipiano superiore del piano delle frequenze complesse, cioè l'insieme di tutte le $z = \omega + i\sigma$ tali che $\sigma > 0$. Se $z \in \Pi^+$ allora

$$|e^{izt}| = e^{-\sigma t}$$

il che mostra che l'integrale (5) è convergente. La continuità di $\widehat{f}(z)$ è facilmente verificata. E altrettanto facilmente si verifica l'analiticità: ad esempio verificando che per qualunque percorso chiuso C nel semipiano superiore

$$\oint_C \widehat{f}(z) dz = 0$$

e quindi (per il teorema di Morera), $\widehat{f}(z)$ è analitica.

Riscriviamo (5) nella forma

$$(5) \quad \widehat{f}(\omega + i\sigma) = \int_0^\infty f(t) e^{-\sigma t} e^{i\omega t} dt$$

e consideriamo σ come fissato. Allora $\widehat{f}(z)$ è la trasformata di Fourier della funzione $f_\sigma(t) = f(t)e^{-\sigma t}$, cioè

$$(6) \quad \widehat{f}(z) = \widehat{f}_\sigma(\omega) \quad \text{per} \quad f_\sigma(t) = f(t)e^{-\sigma t} \quad \text{e} \quad z = \omega + i\sigma$$

Applichiamo l'identità di Parseval-Plancherel (3) a $f_\sigma(t)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}(\omega + i\sigma)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2 e^{-2\sigma t} dt \leq \int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2 dt$$

per ogni $\sigma > 0$. Questo mostra

Proposizione 1. *Se*

$$\widehat{f}(z) = \int_0^\infty f(t) e^{itz} dt \quad \text{per} \quad z \in \Pi^+$$

allora $\widehat{f}(z)$ è analitica nel semipiano superiore Π^+ e le sue restrizioni a linee orizzontali in Π^+ formano un insieme limitato in $L^2(-\infty, \infty)$.

21.1.4. *Funzioni di ordine esponenziale.*

La seconda classe di trasformate di Fourier analitiche consiste in tutte le funzioni della forma

$$\widehat{f}(z) = \int_{-T}^T f(t) e^{itz} dt$$

dove $0 < T < \infty$ e $f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$. Queste funzioni sono intere (stessa dimostrazione di prima) e soddisfano la condizione di crescita

$$|\widehat{f}(z)| \leq \int_{-T}^T |f(t)| e^{-\sigma} dt \leq e^{T|\sigma|} \int_{-T}^T |f(t)| dt$$

Funzioni intere che soddisfano questa condizione di crescita sono dette di *ordine esponenziale*. Se C è la costante che denota l'ultimo integrale dell'equazione precedente, la condizione di crescita implica che

$$(7) \quad |\widehat{f}(z)| \leq C e^{T|z|}.$$

Proposizione 2. Se $\widehat{f}(z)$ è una funzione della forma

$$\widehat{f}(z) = \int_{-T}^T f(t)e^{itz} dt$$

allora è una funzione intera che soddisfa (7) e le sue restrizioni a linee orizzontali nel piano complesso sono in $L^2(-\infty, \infty)$ (per il teorema di Plancherel).

21.1.5. Teoremi di Paley-Wiener.

È un fatto notevole che valgono gli inversi delle proposizioni 1 e 2. I teoremi che stabiliscono questo fatto sono noti come teoremi di Paley-Wiener. Per ragioni di tempo, ci limitiamo ad enunciare questi teoremi senza darne una dimostrazione.

Teorema 1. Si supponga che $\widehat{f}(z)$ sia una funzione analitica nel semipiano superiore Π^+ e che

$$\sup_{0 < \sigma < \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega + i\sigma)|^2 d\omega = C < \infty$$

Allora esiste una funzione $f(t)$ in $L^2(0, \infty)$ tale che

$$f(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{itz} dt$$

e

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = C$$

Teorema 2. Si supponga che T e C siano costanti positive e che $\widehat{f}(z)$ sia una funzione intera tale che

$$|\widehat{f}(z)| \leq Ce^{T|z|}$$

per tutti $z = \omega + i\sigma$
in \mathbb{C} e che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega < \infty$$

Allora esiste una funzione $f(t)$ in $L^2(0, \infty)$ tale che

$$\widehat{f}(z) = \int_{-T}^T f(t)e^{itz} dt$$

21.1.6. Segnali a banda limitata e teorema del campionamento.

Un segnale è detto a *banda limitata* se $\widehat{f}(\omega)$ è assolutamente integrabile e se esiste una frequenza $\Omega > 0$ tale che $\widehat{f}(\omega) = 0$ per tutti gli $|\omega| > \Omega$. La frequenza Ω è chiamata *larghezza di banda*. Un segnale di questo tipo è allora dato da

$$f(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} \widehat{f}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega .$$

Naturalmente, poiché non importano i nomi delle variabili, si applicano le stesse considerazioni che abbiamo fatto prima. La funzione $f(t)$ può essere estesa ad una funzione $f(\zeta)$ nel piano complesso (adesso del tempo) che è analitica e intera (per le stesse ragioni di prima). Anche $f(\zeta)$ è di ordine esponenziale, nel senso che la sua condizione di crescita è

$$|f(\zeta)| \leq e^{\Omega|\operatorname{Im}\zeta|} \int_{-\Omega}^{\Omega} |\widehat{f}(\omega)| d\omega$$

per tutti $\zeta \in \mathbb{C}$.

L'analiticità dei segnali a banda limitata ha conseguenze singolari. Una è il risultato contro-intuitivo che la conoscenza del segnale $f(t)$ in un breve intervallo di tempo $[a, b]$, *arbitrariamente piccolo*, sull'asse reale, determina i suoi valori a tutti i tempi. Questa è una conseguenza dell'unicità del prolungamento analitico delle funzioni analitiche.

★ Ecco un paradosso. È una pratica sperimentale standard che non si possono generare onde di lunghezza d'onda arbitrariamente piccola. Quindi tutti i segnali generati in laboratorio sono a banda limitata. È altresì una pratica sperimentale standard che non ci sono segnali che si estendono infinitamente lontano nel passato. Quindi c'è un $T > 0$ tale che $f(t) = 0$ quando t è reale e $t < -T$. Queste due pratiche sperimentali standard implicano che i segnali sono funzioni analitiche intere che si annullano nell'intervallo $(-\infty, -T) \subset \mathbb{R}$. L'unicità del continuamento analitico implica che tutti i segnali di questo tipo debbano essere identicamente nulli. Perciò il solo segnale che soddisfa la pratica sperimentale standard è $f(t) = 0$! La risoluzione di questo paradosso è che mentre è vero che in laboratorio si può controllare lo spettro in una banda limitata $-\Omega < \omega < \Omega$, si creano in ogni caso, indipendentemente dal nostro controllo, frequenze fuori da questa banda. ★

Uno dei teoremi più interessanti e antichi per i segnali a banda limitata stabilisce che il segnale può essere recuperato progressivamente mediante un campionamento ad intervalli di tempo regolari. Questo fatto fu scoperto da Whittaker nel 1915 e riscoperto da Shannon nel 1949. Formuliamo (una versione di) questo teorema senza darne la dimostrazione.

Prima ricordiamo la definizione della sinc. Sia

$$\operatorname{sinc}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

la funzione *sinc*. Per $t = 0$ il valore della *sinc* è definito pari a 1. Ed ecco il teorema:

Teorema 3 (Whittaker, Shannon). *Sia $f(t)$ un segnale a banda limitata con larghezza di banda Ω e sia*

$$L < \frac{\pi}{\Omega}.$$

Allora f può essere ricostruita da un campionamento dei suoi valori ai tempi $\{nL, n \in \mathbb{Z}\}$ come la serie convergente

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nL}{L}\right) f(nL)$$