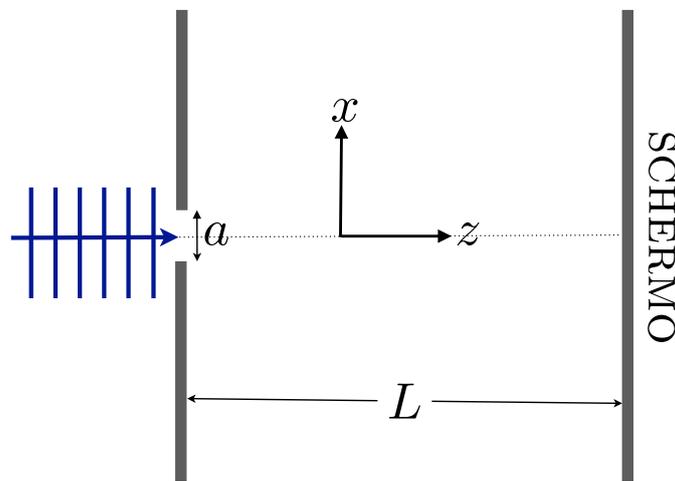


22.2. Perché le trasformate di Fourier spuntano fuori da tutte le parti.

Succintamente, la risposta è: perchè le trasformate di Fourier sono naturalmente prodotte dall'evoluzione temporale a grandi tempi, o a grandi distanze, di onde di vario tipo (sonore, elettromagnetiche, quantistiche etc.). Chiariamo questo, considerando degli esempi.

22.2.1. *Diffrazione in ottica.*

Consideriamo la situazione descritta in figura, con ovvio significato dei simboli: un'onda di luce monocromatica con vettore numero d'onda $\mathbf{k} = K\mathbf{e}_z$ passa attraverso un fenditura di apertura a e poi incide su uno schermo a distanza $L \gg a$ dal piano della fenditura.



Si vuole determinare il profilo dell'onda allo schermo (il cui quadrato è l'intensità dell'onda che viene rilevata allo schermo).

Per semplicità, trattiamo l'onda come uno scalare $\Psi = \Psi(x, z, t)$ e vista la geometria del problema, non ci occupiamo della variabile y ortogonale al piano della figura. Queste non sono assunzioni cruciali, ma servono solo a semplificare l'esposizione. Dopo che la studente ha compreso tutti i passaggi, non è difficile riformulare il tutto in termini di campo elettrico \mathbf{E} , invece dello scalare Ψ , includendo la variabile y .

Assumiamo che la propagazione dell'onda avvenga nel vuoto, per cui Ψ evolve secondo l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

dove $\omega/K = c$. Poiché l'onda è monocromatica, in regime stazionario, possiamo scrivere

$$\Psi(x, z, t) = \psi(x, z)e^{i\omega t}$$

Sostituendo questa forma della soluzione nell'equazione delle onde, si arriva all'equazione di Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -K^2 \psi$$

Poniamo

$$\psi = f(x, z)e^{iKz}$$

(si osservi che questa non è un'assunzione, ma semplicemente una definizione della funzione f) e sostituiamo nell'equazione di Helmholtz. Si ottiene

$$(1) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2iK \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Per tenere conto delle scale fisiche del problema e della condizione $L \gg a$, conviene passare a variabili adimensionate. La presenza dell'apertura di ampiezza a , che restringe il fascio monocromatico ad una larghezza a quando passa attraverso la fenditura, fissa una scala naturale sull'asse delle x . Poniamo allora $X = x/a$.

A questo punto, la scala a longitudinale e il numero d'onde K (fissato, essendo una caratteristica del fascio monocromatico incidente), determinano Ka^2 come scala nella direzione trasversale z . Poniamo allora $Z = z/(Ka^2)$. In termini di queste nuove coordinate adimensionate l'equazione (2) diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{1}{K^2 a^4} \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} + 2iK \frac{1}{Ka^2} \frac{\partial f}{\partial Z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{1}{K^2 a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} + 2i \frac{\partial f}{\partial Z} &= 0 \end{aligned}$$

cioè,

$$2i \frac{\partial f}{\partial Z} = -\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}$$

dove $\epsilon = 1/(Ka)$. Quindi, se la scala trasversale (l'apertura delle fenditura) è molto più grande della lunghezza d'onda incidente ($= 2\pi/K$), la derivata seconda a secondo membro può essere trascurata e si ha

$$(2) \quad i \frac{\partial f}{\partial Z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}$$

L'approssimazione appena descritta è nota come *approssimazione parassiale* (nei libri di ottica non è sempre descritta in una forma comprensibile). L'equazione (2) è un'equazione di "tipo-Schrödinger" con Z che gioca il ruolo del tempo. Risolviamola per il dato "iniziale", cioè per $Z = 0$, che corrisponde alla fenditura di apertura a . Ricordando che X è in unità di a , cioè $X = x/a$, il dato iniziale è

$$f_0(X) = \begin{cases} A_0 & \text{se } -\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per quanto visto nella lezione precedente (e nella lezione 19), si ottiene

$$(3) \quad f(X, Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(X-X')^2/(2Z)} f_0(X') dX'$$

cioè

$$(4) \quad f(X, Z) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi i Z}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{i(X-X')^2/(2Z)} dX'$$

La funzione $f(X, Z)$ può essere espressa in termini di integrali di Fresnel

$$S(x) = \int_0^x \sin(y^2) dy$$

$$C(x) = \int_0^x \cos(y^2) dy$$

mediante un cambiamento di variabili nell'integrale (4) (e ovviamente usando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso). Procedendo in questo modo si ottiene

$$f(X, Z) = \frac{1}{\sqrt{2i}} A_0 \left\{ C\left(\frac{X+1/2}{\sqrt{\pi Z}}\right) - C\left(\frac{X-1/2}{\sqrt{\pi Z}}\right) + iS\left(\frac{X+1/2}{\sqrt{\pi Z}}\right) - iS\left(\frac{X-1/2}{\sqrt{\pi Z}}\right) \right\}$$

che è il profilo di diffrazione di Fresnel, detto anche “a campo vicino” o “near field”. Il profilo di diffrazione “far field”, cioè a “campo lontano” può essere ottenuto direttamente dalla (4) per $Z \gg 1$.

Consideriamo l'argomento dell'esponenziale complesso nella (4):

$$\frac{(X-X')^2}{2Z} = \frac{(X^2 - 2X'X + X'^2)}{2Z} \approx \frac{(X^2 - 2X'X)}{2Z}$$

per $X'^2/2Z \ll 1$, che è proprio la condizione di campo lontano (regime di Fraunhofer). Infatti, osservando che al massimo $X' = 1/2$ e detta $z = L$ la distanza tra fenditura e schermo, la condizione diventa l'approssimazione di Fraunhofer

$$Ka^2 \ll 2L.$$

Dunque se questa condizione di campo lontano vale, la (4) diventa

$$\begin{aligned} f(X, Z) &= \frac{A_0}{\sqrt{2\pi i Z}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{i(X-X')^2/(2Z)} dX' \\ &\sim A_0 \frac{e^{iX^2/(2Z)}}{\sqrt{2\pi i Z}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-(i/Z)XX'} dX' \\ &= A_0 \frac{e^{iX^2/(2Z)}}{\sqrt{2\pi i Z}} \operatorname{sinc}\left(\frac{X}{2Z}\right) \end{aligned}$$

Morale: *sullo schermo lontano si forma un profilo di diffrazione proporzionale alla trasformata di Fourier del campo “iniziale”*. Naturalmente, cioè che si misura

in un esperimento (o si vede con gli occhi) è il quadrato del campo, cioè l'intensità luminosa.

Questo fenomeno è del tutto generale: in una modellizzazione più realistica tridimensionale, in cui, per esempio, si considera come fenditura un'apertura circolare, il profilo che si forma sullo schermo risulta essere proporzionale alla trasformata di Fourier dell'apertura circolare.

22.2.2. *Asintotica a grandi tempi in meccanica quantistica.*

In maniera analoga a quanto visto per l'ottica, possiamo studiare il comportamento a grandi tempi delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger per la particella libera. I passaggi sono del tutto simili, anche se adesso non assumeremo una funzione d'onda iniziale particolare come prima. Adesso la condizione iniziale è $f(x, 0) = f_0(x)$, senza ulteriore specificazione.

La soluzione dell'equazione di Schrödinger è ottenuta dalla (3) per $Z = t$ e $X = \sqrt{\frac{m}{\hbar}}x$:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{im(x-y)^2/(2\hbar t)} f_0(y) dy \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} e^{imx^2/(2\hbar t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-imxy/(\hbar t)} e^{imy^2/(2\hbar t)} f_0(y) dy \\ &\sim \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} e^{imx^2/(2\hbar t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-imxy/(\hbar t)} f_0(y) dy \quad (\text{perché } e^{imy^2/(2\hbar t)} \sim 1 \text{ per } t \rightarrow \infty) \\ &= \sqrt{\frac{m}{i \hbar t}} e^{imx^2/(2\hbar t)} \widehat{f}_0\left(\frac{mx}{\hbar t}\right) \end{aligned}$$

Consideriamo la distribuzione di probabilità $\rho(p)$ di $p = \frac{mx}{t}$ a grandi tempi:

$$\begin{aligned} \rho(p) &= \frac{t}{m} \left| f\left(\frac{t}{m}p\right) \right|^2 \\ &= \frac{t}{m} \frac{m}{\hbar t} \left| \widehat{f}_0\left(\frac{p}{\hbar}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{\hbar} \left| \widehat{f}_0\left(\frac{p}{\hbar}\right) \right|^2 \end{aligned}$$

Risulta così dimostrato che la distribuzione di probabilità dell'impulso asintotico (a grandi tempi)

$$p = \frac{mx}{t}$$

è data dalla trasformata di Fourier della funzione d'onda iniziale. A volte questo fatto è assunto come un assioma della meccanica quantistica, ma è, in effetti, un teorema.

22.2.3. *Asintotica a grandi tempi e metodo della fase stazionaria.*

L'asintotica a grandi tempi è anche un'asintotica a grandi distanze. Infatti, nel caso quantistico $x/t = \mathcal{O}(1)$ e nel caso della diffrazione $X/Z = \mathcal{O}(1)$. Chiarito questo, possiamo ottenere l'asintotica direttamente con il metodo della fase stazionaria partendo dalla soluzione $f(x, t)$ espressa in trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{k^2\hbar}{2m}t} e^{ikx} \widehat{f}_0(k) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\left(k\frac{x}{t} - \frac{k^2\hbar}{2m}\right)} \widehat{f}_0(k) dk \end{aligned}$$

La fase è

$$S(k) = k\frac{x}{t} - \frac{k^2\hbar}{2m}$$

e la sua derivata

$$S'(k) = \frac{x}{t} - \frac{k\hbar}{m}$$

si annulla per

$$k_{\star} = \frac{mx}{\hbar t}$$

Applicando il metodo della fase stazionaria per $t \rightarrow \infty$, $x/t = \mathcal{O}(1)$, a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\left(k\frac{x}{t} - \frac{k^2\hbar}{2m}\right)} \widehat{f}_0(k) dk$$

arriviamo allo stesso risultato per l'asintotica di $f(x, t)$ che abbiamo ottenuto precedentemente.