

23.2. Serie asintotiche.

23.2.1. Confronto tra serie asintotiche e serie convergenti.

Consideriamo la funzione *esponenziale integrale* definita per $\lambda > 0$ da

$$\text{Ei}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

e cerchiamo una sua approssimazione analitica per $\lambda \gg 1$. Integrazione per parti ripetuta, a partire da

$$\int_{\lambda}^{\infty} \underbrace{e^{-t}}_{\text{int}} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\text{der}} dt$$

ci fornisce

$$\begin{aligned} \text{Ei}(\lambda) &= \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_{\lambda}^{\infty} - \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \left[\frac{e^{-t}}{t^2} \right]_{\lambda}^{\infty} + 2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} dt \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2} + 2 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3} dt \\ &\vdots \\ &= e^{-\lambda} \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + \dots + (-1)^{N-1} \frac{(N-1)!}{\lambda^N} \right)}_{S_N(\lambda)} + \underbrace{(-1)^N N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt}_{R_N(\lambda)} \end{aligned}$$

dove $S_N(\lambda)$ è la somma parziale dei primi N termini,

$$S_N(\lambda) = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2!}{\lambda^3} + \dots + (-1)^{N-1} \frac{(N-1)!}{\lambda^N} \right)$$

e $R_N(\lambda)$ il resto dopo N termini,

$$R_N(\lambda) = (-1)^N N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt$$

La serie di cui $S_N(\lambda)$ è la somma parziale è divergente per ogni λ . Si osservi che per N grande la grandezza dell' N -esimo termine aumenta al crescere di N . Naturalmente, anche $R_N(\lambda)$ aumenta al crescere di N poiché $S_N(\lambda) + R_N(\lambda)$ deve rimanere limitato, essendo $\text{Ei}(\lambda)$ definita e limitata per tutti i $\lambda > 0$.

Supponiamo di considerare N fissato e di lasciar diventare λ arbitrariamente grande. Allora

$$\begin{aligned} |R_N(\lambda)| &= \left| (-1)^N N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt \right| \\ &= |(-1)^N| N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt \\ &= N! \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{N+1}} dt \\ &< \frac{N!}{\lambda^{N+1}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-t} dt \\ &= \frac{N!}{\lambda^{N+1}} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

che tende a zero rapidamente (esponenzialmente) quando $\lambda \rightarrow \infty$. Si osservi che il rapporto tra $R_N(\lambda)$ e l'ultimo termine di $S_N(\lambda)$ è

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_N(\lambda)}{(N-1)!e^{-\lambda}\lambda^{-N}} \right| &= \frac{|R_N(\lambda)|}{(N-1)!e^{-\lambda}\lambda^{-N}} \\ &< \frac{N!e^{-\lambda}\lambda^{-(N+1)}}{(N-1)!e^{-\lambda}\lambda^{-N}} \\ &= \frac{N}{\lambda} \end{aligned}$$

e che anch'esso tende a 0 quando $\lambda \rightarrow \infty$. Perciò, per $\lambda \rightarrow \infty$,

$$\text{Ei}(\lambda) = S_N(\lambda) + \mathbf{o}(\text{ULTIMO TERMINE IN } S_N(\lambda))$$

Questo significa, in particolare, che *se λ è sufficientemente grande e N è fissato, $S_N(\lambda)$ fornisce una buona approssimazione a $\text{Ei}(\lambda)$* . L'accuratezza dell'approssimazione aumenta quando λ aumenta per N fissato. Questo significa che possiamo scrivere

$$\text{Ei}(\lambda) \sim e^{-\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2!}{\lambda^3} + \dots \right)$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Si osservi che per λ sufficientemente grande, i termini in $S_N(\lambda)$ diminuiranno successivamente: per esempio,

$$\frac{2!}{\lambda^3} < \frac{1}{\lambda^2}$$

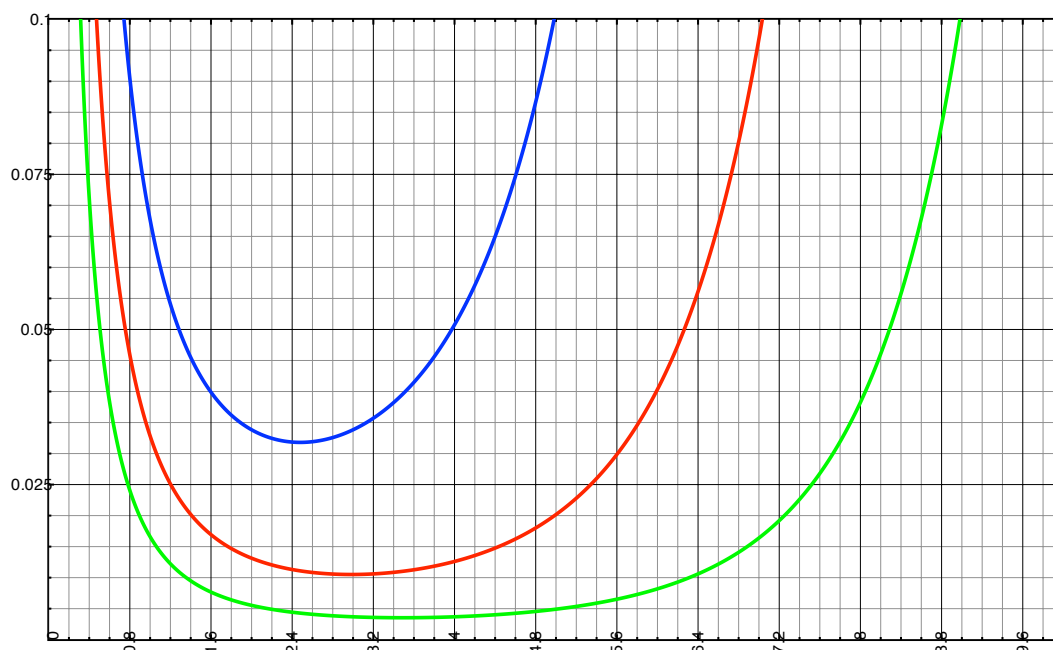
per λ abbastanza grande. Tuttavia, per un certo valore $N = N_*(\lambda)$, in termini in $S_N(\lambda)$ incominceranno successivamente ad aumentare per un dato λ (non importa quanto grande), perché l' N -esimo termine

$$(-1)^{N-1} e^{-\lambda} \frac{(N-1)!}{\lambda^N}$$

è illimitato quando $N \rightarrow \infty$. Quindi, per un dato λ , c'è un valore ottimale di $N = N_*(\lambda)$ per cui si ottiene la migliore approssimazione. La stima precedente del rapporto tra il resto e l'ultimo termine della somma parziale,

$$\left| \frac{R_N(\lambda)}{(N-1)!e^{-\lambda}\lambda^{-N}} \right| < \frac{N}{\lambda},$$

suggerisce di prendere per N_* la parte intera più grande di λ . Ecco un grafico del comportamento dell'ultimo termine in $S_N(\lambda)$, come funzione di N per differenti valori di λ (blu: $\lambda = 2$, rosso $\lambda = 2.5$, verde $\lambda = 3$):



Da un punto di vista pratico, uno sviluppo asintotico di questo tipo può essere molto più utile di un'espansione convergente ma lenta. Uno sviluppo asintotico può essere straordinariamente accurato: per $Ei(\lambda)$ con $\lambda = 10$, $N_* = 10$, ma $S_4(10)$ approssima $Ei(10)$ con un errore che è meno dello 0.003%.

Chiariamo l'idea che sta alla base delle serie asintotiche confrontandole con le serie convergenti. Consideriamo la serie di potenze intorno a $z = z_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Questa serie di potenze è *convergente* ad una funzione $f(z)$ per $|z - z_0| < R$, per qualche $R \geq 0$, se il resto

$$R_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \rightarrow 0$$

quando $N \rightarrow \infty$ **per ogni z fissato che soddisfa** $|z - z_0| < R$. Diciamo invece che una funzione $f(z)$ ha uno sviluppo asintotico

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

se

$$R_N(z) = \mathfrak{o}((z - z_0)^N)$$

quando $z \rightarrow z_0$, **per ogni N fissato**. Detto in altri termini, per una serie convergente, **dati ϵ e z** ,

$$|f(z) - S_N(z)| < \epsilon$$

per N sufficientemente grande, mentre per una serie asintotica, **dati ϵ e N** ,

$$|f(z) - S_N(z)| < \epsilon|z - z_0|^N$$

per z sufficientemente prossimo a z_0 .

23.2.2. *Sviluppi asintotici.*

Definizione 1. Si dice che una successione di funzioni di calibro $\{\phi_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$ forma una successione asintotica quando $x \rightarrow x_0$ se, $\forall n$,

$$\phi_{n+1}(x) = \mathfrak{o}(\phi_n(x))$$

quando $x \rightarrow x_0$.

Esempi: $(x - x_0)^n$, quando $x \rightarrow x_0$; x^{-n} , quando $x \rightarrow \infty$; $(\sin x)^n$, quando $x \rightarrow 0$.

Definizione 2. Se $\{\phi_n(x)\}$ è una successione asintotica di funzioni quando $x \rightarrow x_0$, diciamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x),$$

dove le a_n sono costanti, è uno sviluppo asintotico (o un'approssimazione asintotica) di $f(x)$ quando $x \rightarrow x_0$ se per ogni N ,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) + \mathfrak{o}(\phi_N(x))$$

quando $x \rightarrow x_0$, cioè, l'errore è asintoticamente più piccolo dell'ultimo termine dello sviluppo.

Notazione: lo sviluppo asintotico è denotato

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Definizione 3. Se le funzioni di calibro $\{\phi_n(x)\}$ formano una successione di potenze (positive o negative), lo sviluppo asintotico è detto serie di potenze asintotica.

Esercizio 1. (1) Mediante manipolazioni formali si mostri che la serie formale divergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(-x)^n$$

è una soluzione formale dell'equazione

$$x^2 y''(x) + (1 + 3x)y'(x) + y(x) = 0.$$

(2) Osservando che

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt$$

(vedere lezione 23.1.2), ottenere, mediante manipolazioni formali della serie divergente,

$$y(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

come soluzione (rigorosa) dell'equazione di partenza (la funzione $y(x)$ è ben definita e soddisfa l'equazione differenziale). (3) Dimostrare (rigorosamente!) che

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(-x)^n$$

è lo sviluppo asintotico di $y(x)$ per $x \rightarrow 0$. (Aiuto: usare l'integrazione per parti come per l'esempio all'inizio di questa lezione.)

23.2.3. Proprietà degli sviluppi asintotici.

Unicità. Per una data successione $\{\phi_n(x)\}$ lo sviluppo asintotico di $f(x)$ è unico, cioè i coefficienti a_n dello sviluppo sono unicamente determinati come segue:

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi_1(x)} \\ a_2 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_1 \phi_1(x)}{\phi_2(x)} \\ &\vdots \\ a_N &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \phi_n(x)}{\phi_N(x)} \end{aligned}$$

Non unicità (per una data funzione). Una data funzione può avere differenti sviluppi asintotici. Per esempio, per $x \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}\tan x &\sim x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \\ &\sim \sin x + \frac{1}{2}(\sin x)^3 + \frac{3}{8}(\sin x)^5 + \dots\end{aligned}$$

Sottodominanza. Questo è l'aspetto più spinoso. Uno sviluppo asintotico può essere lo sviluppo asintotico *di più di una* funzione. Per esempio, se quando $x \rightarrow x_0$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

allora anche

$$f(x) + e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

quando $x \rightarrow x_0$ perché

$$e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} = \mathbf{o}((x-x_0)^n) \quad \forall n.$$

In effetti,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

quando $x \rightarrow x_0$, è asintotica a ogni funzione che differisce da $f(x)$ per una funzione $g(x)$ che va a 0 più rapidamente di qualunque potenza di $x-x_0$, quando $x \rightarrow x_0$. Tale funzione $g(x)$ è detta *sottodominante* alla serie di potenze; la sua serie asintotica sarebbe

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot (x-x_0)^n.$$

Quindi uno sviluppo asintotico è asintotico ad una *intera classe di funzioni* che differiscono l'una rispetto all'altra per una funzione sottodominante.

Esempio (errori esponenzialmente piccoli): la funzione e^{-x} è sottodominante a ogni serie asintotica della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$$

quando $x \rightarrow \infty$. Quindi se una funzione $f(x)$ ha un tale sviluppo asintotico, lo stesso sviluppo lo ha anche $f(x) + e^{-x}$, vale a dire, $f(x)$ ha un tale sviluppo asintotico a meno di errori esponenzialmente piccoli.

Operazioni aritmetiche: Se

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \quad \text{e} \quad g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x)$$

allora

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \phi_n(x)$$

Integrazione termine a termine: OK. Se $f(x)$ è integrabile in un intorno di x_0 e

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

allora

$$\int_{x_0}^x f(t) dt \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

Derivazione termine a termine: cautela! Gli sviluppi asintotici non possono in generale essere derivati termine a termine. Il problema con la derivazione è collegato alla sottodominanza. Per esempio, le due funzioni

$$f(x) \quad \text{e} \quad g(x) = f(x) + e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{(x-x_0)^2}}\right)$$

differiscono per una funzione sottodominante e hanno quindi lo stesso sviluppo asintotico quando $x \rightarrow x_0$. Tuttavia $f'(x)$ e

$$g'(x) = f'(x) - 2(x - x_0)^{-3} \cos\left(e^{\frac{1}{(x-x_0)^2}}\right) + 2(x - x_0)^3 e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{(x-x_0)^2}}\right)$$

non hanno lo stesso sviluppo asintotico quando $x \rightarrow x_0$.

Tuttavia, se $f'(x)$ esiste, ed è integrabile vicino a x_0 , allora

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

implica che

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Esercizio 2. Dimostrare il lemma di Watson.