

24.1. Ritorno al gruppo delle trasformazioni di Möbius.

24.1.1. *Lo spazio proiettivo degli stati di un qubit.*

Il qubit è il sistema quantistico più semplice che esista: un sistema i cui stati possibili possono essere espressi come combinazione lineare di due vettori ortogonali usualmente denotati $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Concretamente, possiamo pensare che $|0\rangle$ sia l'autovettore di spin “giù” e $|1\rangle$ l'autovettore di spin “su”, rispetto ad una direzione fissata, di un sistema di spin $1/2$, come, ad esempio, un elettrone (tralasciando i gradi di libertà spaziali), oppure che $|0\rangle$ e $|1\rangle$ siano rispettivamente lo stato fondamentale e lo stato eccitato di un atomo, nell'approssimazione in cui le transizioni ad altri livelli eccitati possono essere trascurate (approssimazione di “atomo a 2 livelli”).

Il generico stato del qubit è dunque associato al vettore in \mathbb{C}^2

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

Non ci si dovrebbe mai stancare di ripetere (fino alla noia) che la rappresentazione degli stati di un sistema fisico mediante vettori di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} è una rappresentazione comoda, ma ridondante. Nella misura in cui il significato dello stato quantistico è ricondotto ai valori di aspettazione delle osservabili rappresentate da operatori auto-aggiunti

$$\bar{A} = \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

lo stato di un sistema fisico **non** è da identificarsi con i vettori in \mathcal{H} ma con la classe di equivalenza dei vettori in \mathcal{H} che differiscono per la moltiplicazione per un numero complesso. In altre parole, $|\psi\rangle$ e $z|\psi\rangle$, con $z \in \mathbb{C}$, rappresentano lo stesso stato.

In altre parole, la rappresentazione dello stato in termini di un vettore in \mathcal{H} è analoga alla rappresentazione di un campo elettromagnetico in termini di potenziale, con diversi potenziali che rappresentano lo stesso campo. A volte, si dice che lo stato quantistico è a meno di una fase, sottintendendo che lo stato è normalizzato a 1. Questo va bene, purché ci si ricordi che questa è solo una comodità per scrivere i valori di aspettazione come

$$\bar{A} = \langle\psi|A|\psi\rangle.$$

Tuttavia, in questa scelta non c'è nulla di fisicamente sostanziale: gli stati fisici sono classi di equivalenza di vettori che differiscono per una costante moltiplicativa complessa.

Ma che cos'è l'insieme delle classi di equivalenza di vettori che differiscono per una costante moltiplicativa? Nello spazio euclideo tri-dimensionale questo insieme è ben noto: è *l'insieme delle direzioni* o, se volete, delle rette che passano per l'origine. In matematica, questo insieme è noto come *spazio proiettivo*.

L'idea di spazio proiettivo si collega alla prospettiva, più precisamente a come una scena 3-dimensionale si proietta in un'immagine bidimensionale (nell'occhio o in una macchina fotografica). Tutti i punti che stanno su una linea di proiezione, che intersecano il punto focale della lente, sono proiettati in un punto immagine comune.

Lo spazio proiettivo di \mathbb{R}^2 è la linea proiettiva reale $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, che può essere rappresentata come una circonferenza in cui i punti anti-podali sono identificati e lo spazio proiettivo di \mathbb{R}^3 è il piano proiettivo $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ che può essere rappresentato come la superficie di una sfera in cui i punti antipodali sono identificati.

Lo spazio degli stati di un sistema quantistico è $\mathcal{P}(\mathcal{H})$. Gli elementi di $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ sono usualmente chiamati *direzioni* o *raggi* di \mathcal{H} . Come è fatto questo spazio? Non risponderemo a questa domanda in generale, ma nel caso specifico in cui $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. In questo caso, $\mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ è, fisicamente, lo spazio degli stati di un qubit e, matematicamente, la linea proiettiva complessa.

24.1.2. Spazio proiettivo degli stati del qubit = Sfera di Bloch.

Un raggio in \mathbb{C}^2 è in corrispondenza con il proiettore lungo la direzione del raggio. Un proiettore P è una matrice hermitiana idempotente. L'idea è quella di scrivere una generica matrice hermitiana in \mathbb{C}^2 , imporre la condizione di idempotenza $P^2 = P$ e ottenere così la forma del generico proiettore P , e quindi del raggio con cui è in corrispondenza.

Le matrici hermitiane complesse 2×2 formano uno spazio vettoriale reale a 4 dimensioni reali in quanto devono essere della forma

$$\begin{bmatrix} a & x - iy \\ x + iy & d \end{bmatrix}$$

con a, d, x, y reali. Lo spazio vettoriale è reale perché solo combinando matrici hermitiane con numeri reali si ha ancora una matrice hermitiana,

$$(aA + bB)^* = \bar{a}A^* + \bar{b}B^* = (aA + bB) \quad \text{sse} \quad a = \bar{a} \text{ e } b = \bar{b}.$$

Una base conveniente in questo spazio di matrici è quella formata dall'identità

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0$$

e dalle matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Scriviamo allora la generica matrice hermitiana come

$$A = a_0\sigma_0 + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

dove

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3$$

Ricordiamo che nel manipolare le matrici di Pauli le identità più importanti sono

$$\sigma_i^2 = I, \quad (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Scriviamo un generico proiettore come

$$P = \frac{1}{2}(a_0\sigma_0 + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

(il fattore $1/2$ è solo per comodità) e imponiamo che $P^2 = P$. Si ha

$$P^2 = \frac{1}{4}(a_0^2\sigma_0 + 2a_0\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} + |\mathbf{a}|^2),$$

da cui vediamo che $P^2 = P$ sse $a_0^2 = 1$ e $|\mathbf{a}|^2 = 1$. Quindi, detto \mathbf{n} un generico vettore reale tri-dimensionale a norma 1, il generico proiettore si scrive come

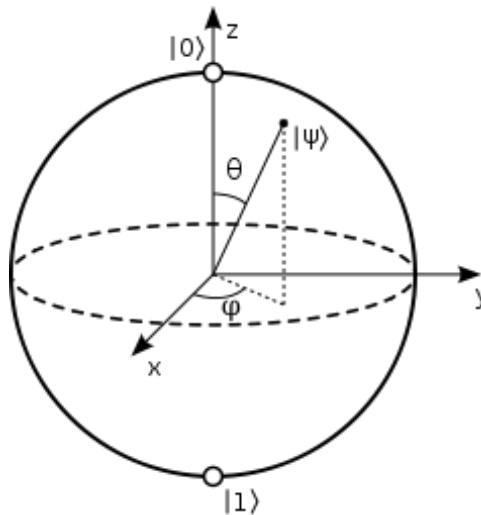
$$P = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

Quindi lo spazio degli stati di un qubit, cioè lo spazio proiettivo dei raggi di \mathbb{C}^2 , è rappresentato dall'insieme dei vettori reali tridimensionali di norma 1, vale a dire i punti sulla superficie di una sfera unitaria. Questa sfera è detta sfera di Bloch (in ottica è nota come sfera di Poincaré degli stati di polarizzazione).

Si osservi che

$$\frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \frac{1}{2}(\sigma_0 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4}(1 - 1) = 0,$$

cioè punti anti-podali sulla sfera corrispondono a stati ortogonali. Se, convenzionalmente, poniamo $|0\rangle$ nel polo Nord, il vettore $|1\rangle$ sarà al polo sud. Ecco una figura della sfera di Bloch che ne risulta:



Vediamo la rappresentazione di un generico ψ per $\mathbf{n} = (X, Y, Z)$ con

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Si ha

$$(1) \quad P = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + Z & X - iY \\ X + iY & 1 - Z \end{bmatrix}$$

Dette ξ e η le componenti di $|\psi\rangle$ rispetto alla base $|0\rangle, |1\rangle$, cioè

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix},$$

e assumendo per comodità $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, deve valere anche

$$P = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{bmatrix}$$

Uguagliando gli elementi di matrice di P della precedente equazione con quelli dell'equazione (1) si determina la mappa dai raggi in \mathbb{C}^2 ai punti della sfera di Bloch.

Per ottenere una formula esplicita, conviene introdurre coordinate sferiche

$$X = \sin\theta \cos\phi \quad Y = \sin\theta \sin\phi \quad Z = \cos\theta$$

Allora

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + Z & X - iY \\ X + iY & 1 - Z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos\theta & \sin\theta \cos\phi - i \sin\theta \sin\phi \\ \sin\theta \cos\phi + i \sin\theta \sin\phi & 1 - \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} & 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Quindi, $\xi = \cos \frac{\theta}{2}$ e $\eta = \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}$, cioè,

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{bmatrix},$$

24.1.3. Sfera di Bloch = sfera di Riemann.

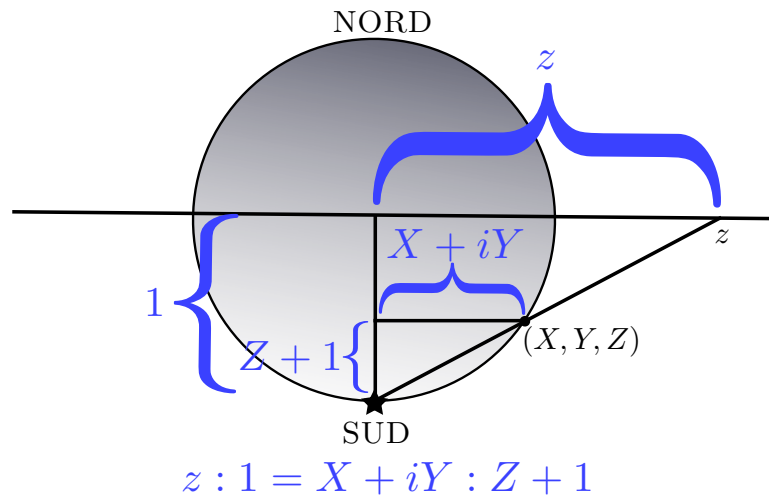
Le componenti ξ e η di $|\psi\rangle$ sono a meno della moltiplicazione per un numero complesso (di modulo 1 se il raggio della sfera di Bloch è normalizzato a 1). Quindi il raggio in \mathbb{C}^2 associato a $|\psi\rangle$ è determinato dal rapporto tra queste due coordinate. In altre parole, ξ e η sono coordinate omogenee del piano complesso \mathbb{C} , secondo la relazione

$$(2) \quad z = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} e^{i\phi} = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi}$$

(naturalmente, avremmo potuto scegliere anche ξ/η). Ma questa non è altro che la proiezione stereografica della sfera di Riemann sul piano complesso rispetto al polo SUD:

$$z = \frac{X + iY}{Z + 1} = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi}$$

come mostrato in figura (dove piano complesso e sfera sono visti in sezione):



(che $(X + iY)/(Z + 1)$ sia uguale a $\tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi}$ segue dai calcoli alla fine della sezione precedente).

Ritroviamo così la proiezione stereografica che mette in corrispondenza la sfera di Riemann con il piano complesso esteso $\mathbb{C} \cup \infty$ che avevamo incontrato nella lezione 2. Allora il punto all'infinito era stato messo in corrispondenza con il polo NORD, adesso con il polo SUD, ma la situazione è esattamente la stessa (la scelta di proiettare rispetto al NORD o al SUD è del tutto convenzionale). Le formule di inversione sono (esercizio)

$$X + iY = \frac{2z}{1 + |z|^2}, \quad Z = \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}$$

Si osservi che

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= (X + iY)(X - iY) + Z^2 \\ &= \frac{4|z|^2}{(1 + |z|^2)^2} + \frac{(1 - |z|^2)^2}{(1 + |z|^2)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

come deve essere. Riassumendo,

$$\begin{aligned} \text{SPAZIO DEGLI STATI DEL QUBIT} &= \text{SFERA DI BLOCH} \\ &= \text{PIANO COMPLESSO ESTESO } \mathbb{C} \cup \infty \\ &= \text{SFERA DI RIEMANN} \end{aligned}$$

24.1.4. **Trasformazioni unitarie proiettive del qubit.** In meccanica classica le trasformazioni che lasciano invariata la forma dell'equazioni del moto sono dette *canoniche*. Quali sono le trasformazioni canoniche in meccanica quantistica?

In meccanica quantistica le equazioni del moto hanno la forma generale

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle$$

dove l'Hamiltoniana H è autoaggiunta o hermitiana. Le trasformazioni che lasciano invariata questa forma sono le trasformazioni unitarie. In particolare, in \mathbb{C}^2 una generica matrice unitaria $U^* = U^{-1}$ ha la forma

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

dove a e b sono numeri complessi di modulo 1. L'insieme di queste matrici forma il gruppo $SU(2)$.

Ma lo stato del qu-bit è il raggio, non il vettore: la moltiplicazione per un numero complesso non altera lo stato. Quindi le vere trasformazioni canoniche quantistiche del qubit sono

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

a meno della moltiplicazione per un numero complesso. Queste trasformazioni formano il gruppo $\mathcal{P}SU(2)$, il gruppo delle trasformazioni unitarie proiettive in due dimensioni. Osserviamo che $\mathcal{P}SU(2)$ è in corrispondenza uno-a-uno con il sottogruppo delle trasformazioni di Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

(è una rappresentazione fedele di questo sottogruppo delle trasformazioni di Möbius)

Consideriamo l'azione di un generico elemento $U \in \mathcal{P}SU(2)$ (rappresentato come matrice 2×2 a meno di una fase) sulla sfera di Riemann-Bloch. Poiché

$$|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle \quad \text{e} \quad \langle\psi| \rightarrow \langle\psi|U^*$$

si ha

$$P \rightarrow UPU^*$$

Ricordando (1),

$$P = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+Z & X-iY \\ X+iY & 1-Z \end{bmatrix}$$

avremo che

$$P \rightarrow \frac{1}{2}U(\sigma_0 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})U^* = \frac{1}{2}(UU^* + U\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}U^*) = \frac{1}{2}(\sigma_0 + U\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}U^*)$$

essendo $UU^* = I$ in quanto U è unitaria. Inoltre, sempre perché U è unitaria,

$$U\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}U^* = \mathbf{n}' \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

dove $\mathbf{n}' = (X', Y', Z')$ e $X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 1$. Quindi

$$P = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \rightarrow P' = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \mathbf{n}' \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

Conclusione: l'effetto di

$$z \mapsto \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

sulla sfera di Riemann-Bloch è una *rotazione usuale della sfera!*