

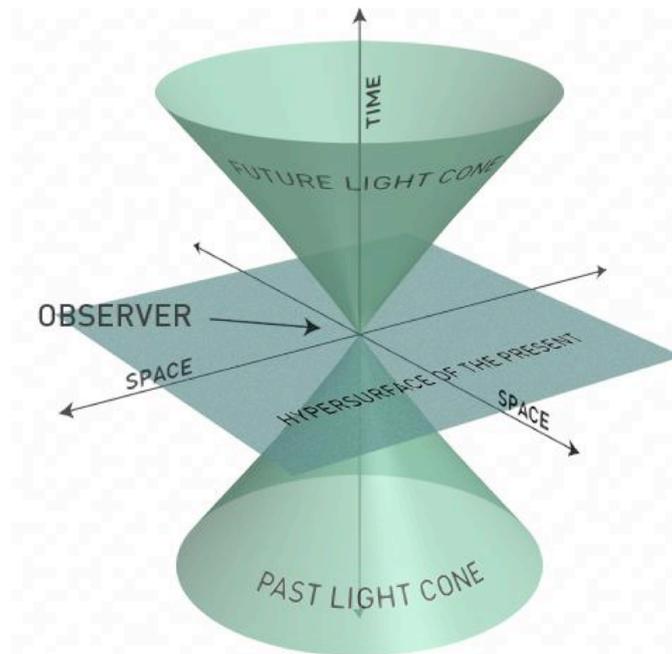
24.1. Gruppo di Lorentz e trasformazioni di Möbius.

24.1.1. Il gruppo $SL(2, C)$ e il gruppo di Lorentz.

Il gruppo di Lorentz L è il gruppo delle trasformazioni lineari in \mathbb{R}^4 che preserva la forma

$$T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2$$

dove T, X, Y, Z sono le coordinate di un evento. In questa lezione assumiamo che $c = 1$, cioè che le velocità siano adimensionate e misurate in unità di c (e le lunghezze in secondi-luce). La geometria in 4 dimensioni definita da questa proprietà di invarianza è la geometria di Minkowski e lo spazio geometrico così ottenuto è detto *spazio-tempo*. La struttura geometrica di questo spazio è riassunta dalla seguente figura:



Tutta la cinematica della relatività è conseguenza del significato fisico della forma infinitesima

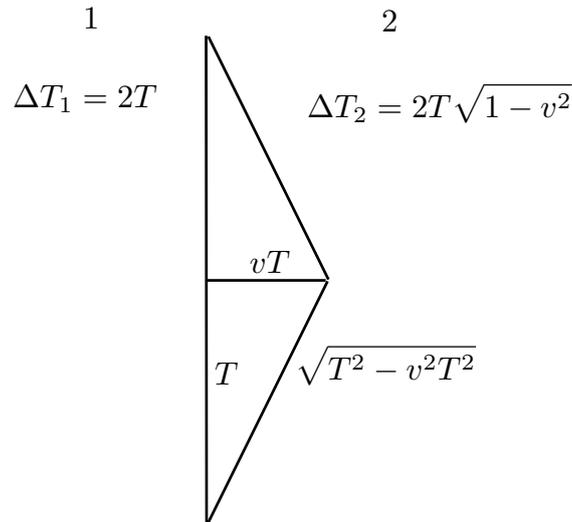
$$ds = dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2$$

che rappresenta la distanza spazio-temporale tra eventi infinitamente vicini. Ad esempio, se un qualunque sistema fisico si muove lungo una curva C di tipo tempo (la tangente V alla curva è un vettore di tipo tempo, cioè tale che $V_0^2 - V_1^2 - V_2^2 -$

$V_3^2 > 0$, allora

$$\int_{C_A}^B ds$$

è l'intervallo di tempo trascorso tra A e B per il sistema fisico in questione. La seguente figura (auto evidente) spiega come la soluzione del cosiddetto paradosso dei gemelli sia ovvia quando si prende sul serio la geometria di Minkowski.



In questa lezione vogliamo considerare una rappresentazione matematica degli eventi più sofisticata di quella usuale, ma molto più potente e utile. La rappresentazione usuale è in termini di vettori con 4 componenti, quella che vogliamo considerare adesso è in termini di matrici hermitiane complesse 2×2 . La corrispondenza tra matrici di questo tipo e quadrivettori è stabilita nel seguente modo.

Al quadrivettore $x = (T, X, Y, Z)$ associamo la matrice hermitiana

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} T + Z & X - iY \\ X + iY & T - Z \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$. Viceversa, data una matrice A hermitiana e 2×2 , sappiamo che essa può essere scritta nella base delle matrici di Pauli e dell'identità $I = \sigma_0$ come

$$A = (T\sigma_0 + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = x^\mu \sigma_\mu$$

Risulta così stabilita una corrispondenza uno-a-uno tra vettori nello spazio di Minkowski e matrici hermitiane 2×2 . La corrispondenza è tuttavia significativa se non è una semplice corrispondenza tra vettori, che dipende dalla scelta di una base in \mathbb{R}^4 , ma se è indipendente dalla scelta della base ed è dunque *invariante*, cioè tale da preservare la struttura geometrica dello spazio-tempo rispetto all'invarianza di Lorentz.

Mostriamo che è il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$, cioè il gruppo delle matrici M a determinante 1,

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad ad - bc = 1,$$

a rappresentare il gruppo di Lorentz nello spazio delle matrici hermitiane. Consideriamo l'azione di $SL(2, \mathbb{C})$ sulle matrici hermitiane

$$A \mapsto A' = MAM^*$$

Si verifica facilmente che queste trasformazioni formano un gruppo. Poiché il determinante di una matrice è il prodotto dei determinanti, le trasformazioni $SL(2, \mathbb{C})$ preservano il determinante. Allora quando agisce $SL(2, \mathbb{C})$ sulle matrici $\hat{x} = \sigma_\mu x^\mu$ ne preserva il determinante

$$(T - Z)(T + Z) - (X - iY)(X + iY) = T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2$$

che è proprio l'invarianza che definisce il gruppo di Lorentz.

C'è quindi una corrispondenza tra $SL(2, \mathbb{C})$ e il gruppo di Lorentz L . La corrispondenza non è uno a uno: $+I$ e $-I$ sono entrambi in corrispondenza con l'identità di L . La corrispondenza diventa uno a uno se passiamo al gruppo proiettivo $\mathcal{P}SL(2\mathbb{C})$ che è isomorfo al gruppo di Moebius

$$z \mapsto M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \longrightarrow [M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Infatti, come avevamo visto nella lezione 2, $k[M]$ e $[M]$ corrispondono alla stessa trasformazione M . Se M è normalizzata, $ad - bc = 1$, allora $[M]$ è unica a meno di un segno: $[M]$ e $-[M]$ danno la stessa trasformazione di Möbius.

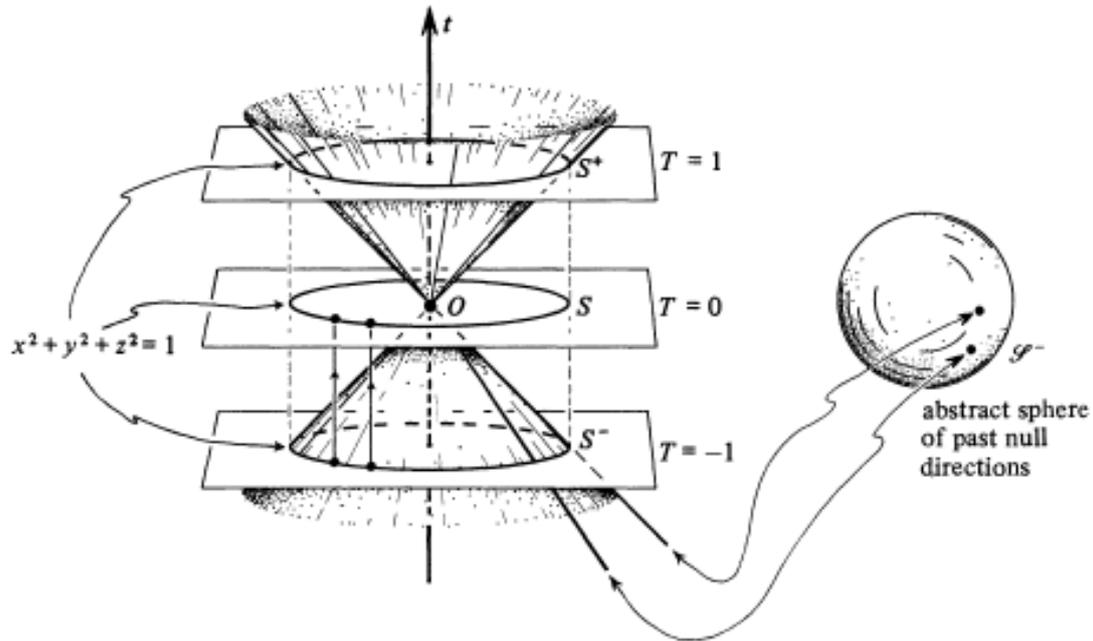
24.1.2. *Sfera di Riemann = sfera celeste.*

Adesso mostriamo che la sfera di Riemann (di raggio $|T|$) è in corrispondenza con i vettori nulli

$$T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$$

e che questa sfera rappresenta la sfera celeste di un osservatore. Per capire di che cosa stiamo parlando è utile dare un'occhiata alla seguente figura tratta dal libro

di Penrose e Rindler "Spinors and space-time"



Fisicamente, i vettori nulli sono i raggi di luce: (X, Y, Z) sono le coordinate della stella nel cielo e T il tempo quando il fotone che cade adesso sulla nostra retina è stato emesso dalla stella.

Sorprendentemente, ci troviamo di fronte alla stessa matematica del qu-bit, ma con un significato fisico e geometrico completamente diverso. Allora avevamo stabilito una corrispondenza tra vettori in \mathbb{C}^2

$$\psi = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix},$$

e punti sulla sfera $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Osserviamo che quando i vettori bi-dimensionali complessi ψ emergono in relazione con il gruppo di Lorentz, sono detti *spinori*.

Adesso i quadrivettori nulli sono in corrispondenza con una sfera di raggio $|T|$ anziché 1, ma questa non è una differenza sostanziale. In effetti, se intendiamo rappresentare i punti sulla sfera celeste, l'informazione riguardo al tempo in cui i fotoni sono stati emessi è del tutto ridondante e possiamo porre $|T| = 1$ (come nella figura di Penrose e Rindler riportata sopra). La corrispondenza è costruita in modo analogo a quanto fatto per il qu-bit:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi} & \bar{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi\bar{\xi} & \xi\bar{\eta} \\ \eta\bar{\xi} & \eta\bar{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T + Z & X - iY \\ X + iY & T - Z \end{bmatrix}$$

Procedendo come nella lezione precedente, possiamo rappresentare ξ e η in termini di coordinate sferiche, ma per gli scopi presenti ci basta molto meno. Poichè l'obbiettivo è arrivare alla corrispondenza con i punti z del piano complesso di cui ξ e η sono coordinate omogenee, cioè $z = \eta/\xi$, vediamo che dalla formula precedente possiamo leggere direttamente

$$z = \frac{\eta}{\xi} = \frac{X + iY}{T + Z} = \frac{T - Z}{X - iY}$$

Ecco una figura tratta dal libro "Gravitation" di Wheeler, Misner e Thorne, con una proiezione stereografica più appropriata allo scopo presente, che illustra quello che stiamo cercando di ottenere.

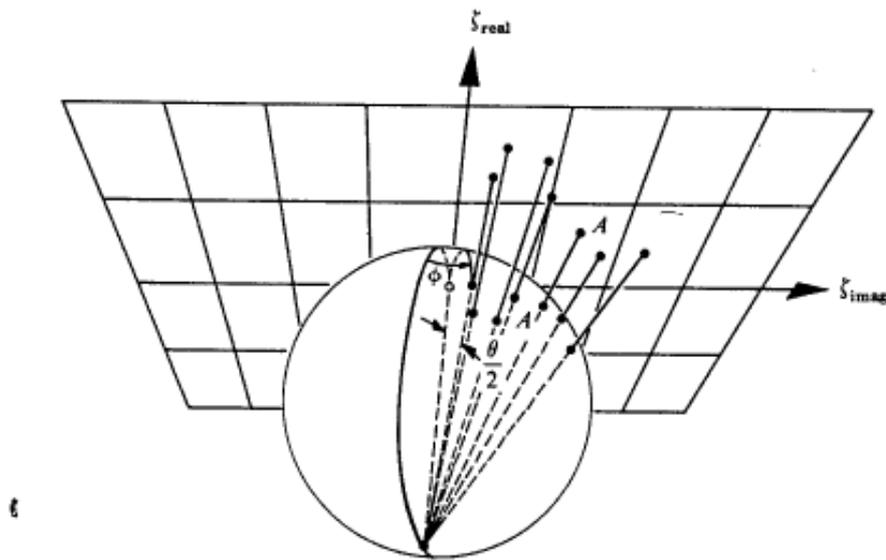


Figure 41.8.

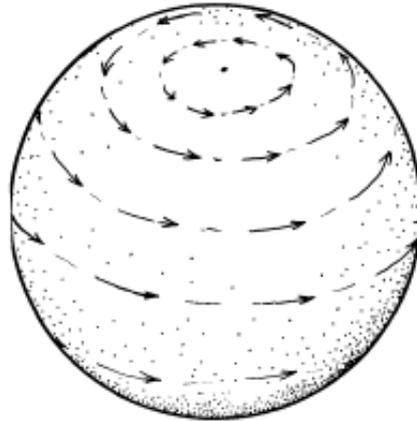
Representation of a direction in space (one of the stars of the Big Dipper, regarded as a point on the celestial sphere) as a point in the complex ξ plane ($\xi = \text{ratio } \xi^2/\xi^1$ of spinor components) by stereographic projection from the South Pole.

La proiezione stereografica della figura non introduce modifiche sostanziali rispetto alla proiezione che abbiamo considerato per il qu-bit e quindi rimarremo con le nostre vecchie convenzioni.

Abbiamo già visto che le rotazioni della sfera di Riemann corrispondono alle trasformazioni di Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{-bz + \bar{a}}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Naturalmente, questo continua a valere e si ha quanto mostrato in figura



Adesso vogliamo vedere come si rappresentano i boost del gruppo di Lorentz.

Consideriamo un boost di velocità v nella direzione z

$$\begin{aligned} T' &= \frac{T + vZ}{\sqrt{1 - v^2}} \\ X' &= X \\ Y' &= Y \\ Z' &= \frac{Z + vT}{\sqrt{1 - v^2}} \end{aligned}$$

che riscriviamo nella forma

$$\begin{aligned} T' + Z' &= w(T + Z) \\ T' - Z' &= \frac{1}{w}(T - Z) \\ X' &= X \\ Y' &= Y \end{aligned}$$

avendo introdotto

$$w = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$$

noto come fattore di effetto Doppler relativistico ($\ln w = \tanh^{-1} v$ è la rapidità corrispondente a v).

Quindi, nel piano complesso che rappresenta la volta celeste, si ha

$$z = \frac{X + iY}{T + Z} \mapsto \frac{1}{w} \frac{X + iY}{T + Z} = \frac{1}{w} z$$

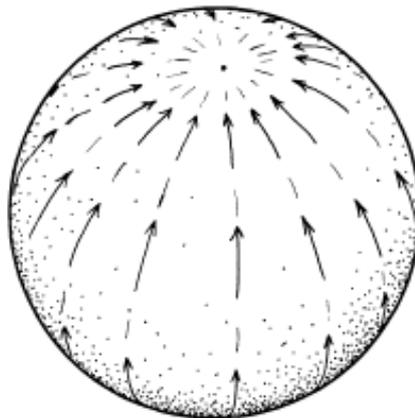
vale a dire, un cerchio centrato nel polo NORD si contrae di un fattore $1/w$. Abbiamo così una sorta di effetto Star-Trek (quando il capitano Kirk fa un boost per portarsi a velocità di warp)



Più seriamente, si ha l'effetto della trasformazione di Möbius

$$z \mapsto az \quad a = \frac{1}{w}$$

sulla sfera di Riemann= sfera celeste, mostrato in figura (sempre dal libro di Penrose e Rindler):



Nota: non c'è nulla di speciale rispetto al NORD: fissata una qualunque direzione al boost di velocità v in quella direzione corrisponde una trasformazione di Möbius. Analogamente, fissata una direzione qualunque, possiamo considerare la rotazione di un angolo α , rispetto all'origine, nel piano perpendicolare a quella direzione. Morale. Boost: 3 numeri reali (due per specificare la direzione nello spazio tri-dimensionale, uno per la velocità) + rotazioni: 3 numeri reali (due per specificare

la direzione nello spazio tri-dimensionale, uno per l'angolo) = 6 numeri reali. Il gruppo di Lorentz e l'isomorfo gruppo delle trasformazioni Möbius (a determinante 1) sono un gruppo continuo a 6 parametri.

★ Nota finale: *poichè le trasformazioni di Möbius trasformano cerchi in cerchi, la contrazione di Lorenz non si vede e una sfera appare sempre come una sfera e non come un elissoide.*