

# Sistemi di numerazione

Marco Bonvini

21 agosto 2006

## 1 I sistemi di numerazione

### 1.1 Perché il sistema decimale

L'uomo ha 10 dita, e per questo ha inventato un sistema di numerazione detto, per questo motivo, *decimale*.

Ma cosa significa?

Immaginiamo di contare, da 0 a  $n$ , disponendo delle nostre 10 dita: se  $n \leq 10$  non abbiamo alcun problema; ma se  $n > 10$  non abbiamo più dita a disposizione. La soluzione è che, non appena arrivati a 10, un altro uomo alza un dito e noi “azzeriamo le dita”. Questo dito alzato dal nostro amico ci ricorda che già siamo arrivati a 10. Quindi per contare 11 abbiamo il dito dell'amico più un nostro dito, per 12 il dito dell'amico più due nostre dita...

Arrivati a 20 il nostro amico alzerà un altro dito, marcando 2, e noi azzereremo di nuovo. Se volessimo superare il 100 avremmo bisogno di un altro amico...

L'analogia si estende ai numeri: nella numerazione decimale disponiamo di 10 cifre,

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

che vengono associate alle dita non con piena coerenza: infatti lo 0 corrisponde a 0 dita, l'1 a 1 dito, ... e il 9 a 9 dita; il decimo dito *non serve*.

Però questa inutilità ha una spiegazione: quando si arrivava a 10 nel contare, si marcava un 1 e si azzerava il contatore (le dita), senza con ciò andare avanti nel conteggio. Quindi con le dita la situazione “10 dita” e la situazione “0 dita” è equivalente.

Perciò, contando con i numeri, arriviamo con facilità a 9, dopodiché dobbiamo “chiedere aiuto ad un amico”. L'amico, in questo caso, è una posizione a sinistra della posizione in cui abbiamo scritto tutte le cifre fino a 9.

$$\begin{array}{r} \_0 \\ \_1 \\ \dots \\ \_9 \\ \underline{10} \end{array}$$

Anche in questo caso il processo continua e tutti i numeri diventeranno scritti esattamente come li conosciamo.

Come appare chiaro dal modo in cui è costruito, un numero, ad esempio 347, significa 7 più 4 volte 10 più 3 volte 10 volte 10, cioè 3 volte 100. Quindi 347 si può scrivere come

$$347 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

## 1.2 Come funziona un sistema di numerazione

Generalizziamo la situazione: sia dato un sistema di numerazione in base  $B$ , avendo indicato con base il numero di cifre di cui si dispone.

Si consideri un numero  $k$  composto dalla sequenza ordinata di cifre  $a_i$ , dove ciascun  $a_i \in [0; B - 1]$  (e quindi è chiaro che ci sono in totale  $B$  cifre possibili), e con  $i$  indice che corrisponde alla posizione di  $a_i$  a partire da destra; tale numero può essere rappresentato come la sequenza

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$$

(attenzione che non si tratta di prodotti, ma di cifre scritte in quell'ordine!)

Tale numero  $k$  equivale a

$$k = \sum_{i=0}^n a_i B^i \quad (1)$$

o, in maniera estesa e forse più comprensibile,

$$k = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \dots + a_2 B^2 + a_1 B^1 + a_0 B^0$$

Il numero  $n + 1$  è chiaramente il numero di cifre che compone il numero  $k$ .

Ad esempio, il numero 102 in base 3 equivale a

$$102_{B=3} = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 11_{B=10}$$

Perché il risultato ottenuto è in base 10? Semplicemente perché i conti dello sviluppo sono stati eseguiti con il nostro consueto modo di contare, che è in base 10. Ma se il conto fosse stato eseguito con metodologie per un altro sistema il risultato si sarebbe ottenuto per questo sistema. Ad esempio se avessi voluto fare il conto in base 4 avrei dovuto tener conto del fatto che:

$$\begin{aligned} 3^0 &= 1 \\ 3^1 &= 3 \\ 3^2 &= 3 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 = 21_{B=4} \\ 2 \cdot 3^0 &= 2 \cdot 1 = 2 \\ 0 \cdot 3^1 &= 0 \cdot 3 = 0 \\ 1 \cdot 3^2 &= 1 \cdot 21_{B=4} = 21_{B=4} \\ 21 + 0 + 2 &= 23_{B=4} \end{aligned}$$

L'unica equazione strana in questo set è  $3 + 3 + 3 = 21_{B=4}$ , però, se ragionate come è stato fatto nel § 1.1, cioè contando, non dovrete avere difficoltà a convincervi che 21 sia effettivamente il risultato corretto. In seguito vi farò vedere un metodo per convertire i numeri da decimale a base qualunque, cosicché si potrà fare  $3 + 3 + 3 = 9$  in decimale e convertire il 9 in base 4.

Comunque per convincersi che sia il risultato corretto si può provare che 23 in base 4 equivalga a 11 in base 10; col solito metodo otteniamo

$$23_{B=4} = 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 11_{B=10}$$

come volevasi dimostrare.

### 1.3 Conversioni tra sistemi

Come si è visto qui sopra, la conversione tra sistemi di numerazione può avvenire usando semplicemente la formula (1), purché i calcoli si facciano nel sistema *in* cui si vuole convertire un numero. Ma sempre nello stesso paragrafo abbiamo visto che fare questi calcoli non è molto facile in generale.

Però lo diventa se il sistema “di arrivo” è il decimale. Quindi se si trovasse un metodo di conversione, facile e veloce, dal decimale a un sistema in base qualunque il processo di conversione da un sistema a base  $A$  ad un sistema a base  $B$  potrebbe avvenire come segue:

$$\begin{aligned} k_A &\longrightarrow k_{10} \\ k_{10} &\longrightarrow k_B \end{aligned}$$

dove  $k$  è il numero da convertire.

In effetti un metodo c'è, ed è davvero semplice: *basta prendere  $k_{10}$ , dividerlo per  $B$  e prendere il resto, considerare il quoziente, dividerlo per  $B$  e prendere il resto, ... finché giunti alla fine è sufficiente leggere i resti in senso contrario.*

Bello, ma cerchiamo di darne una spiegazione.

Intanto premetto che questa conversione si può fare anche da un qualunque sistema  $A$ , non necessariamente dal decimale, a patto però che le divisioni si facciano contando in quel sistema (il che ci riporterebbe al problema di prima...).

Si consideri il numero  $k$  dato dalla formula (1) e si noti che, per  $i = 0$ , l'elemento da sommare è semplicemente  $a_0$ . Allora la (1) si può riscrivere come

$$k = \sum_{i=1}^n a_i B^i + a_0 = \left( \sum_{i=1}^n a_i B^{i-1} \right) B + a_0$$

L'idea si può iterare all'interno della parentesi e alla fine di questo sviluppo otteniamo

$$k = ((\dots((a_n)B + a_{n-1})B + \dots)B + a_1)B + a_0$$

Ora si vede chiaramente che se dividiamo  $k$  per  $B$  otteniamo la parte interna alla parentesi più esterna con resto  $a_0$ , se dividiamo questa parte per  $B$  otteniamo la parte immediatamente più interna con resto  $a_1$  ...

Infine ci troveremo a dividere la parte più interna, che è  $a_n$ , per  $B$  ottenendo 0 con resto  $a_n$  e chiudendo il processo.

(È chiaro che gli  $a_i$  non saranno mai divisibili per  $B$  per costruzione, in quanto sono le cifre da 0 a  $B - 1$ .)

Tutto ciò dimostra l'affermazione data precedentemente riguardo la tecnica di conversione, ed evidenzia anche il fatto che il sistema da cui si vuole partire è totalmente arbitrario (il decimale è più comodo solo perché semplifica i conti).

Per fare un esempio vediamo come si converte il numero 346 da decimale a un sistema in base 5. Nel dividere e prendere i resti otterremmo una tabella di questo tipo:

$$\begin{array}{r|l} 346 & 1 \\ 69 & 4 \\ 13 & 3 \\ 2 & 2 \\ 0 & \end{array}$$

da cui deduciamo che  $346_{10} = 2341_5$ ; per convincerci tramite la formula (1) calcoliamo  $2341_5$

$$2341_5 = 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 250_{10} + 75_{10} + 20_{10} + 1_{10} = 346_{10}$$

come volevasi dimostrare.

## 2 Alcuni importanti sistemi

Esistono alcuni importanti sistemi di numerazione, molto usati soprattutto in elettronica e informatica. Essi sono il binario, l'ottale e l'esadecimale.

### 2.1 Il sistema binario

Il sistema binario è, come dice il nome, in base 2, cioè bastano 2 cifre,  $\{0, 1\}$ , per costituire la numerazione. Questo sistema ha importanza fondamentale in elettronica e in informatica, perché 2 cifre possono essere rappresentate dall'assenza (0) o dalla presenza (1) di un segnale elettrico, e simboleggiare le informazioni logiche true (1) e false (0).

Sull'utilizzo del sistema binario non c'è molto da dire, in quanto tutte le tecniche di conversione fanno riferimento a quelle generali descritte nei § 1.2 e § 1.3.

Si possono fare però una serie di osservazioni: per prima cosa è un sistema che genera numeri lunghissimi (solo in base 1 si avrebbero numeri più lunghi), e quindi poco significativi per un uso comune.

Però come già si è detto avere solo 2 cifre è una comodità: ad esempio se volessimo contare con le dita potremmo sfruttare la necessità di 2 sole cifre per far fare ad un dito il compito che in decimale hanno 2 mani. Infatti il dito abbassato indica 0, e il dito alzato 1. Così le altre dita fanno le veci dei nostri amici, e possiamo contare in questo modo, anziché fino a 10, fino a  $2^{10} - 1 = 1023$ ; una bella differenza!

### 2.2 Il sistema esadecimale

Il sistema esadecimale, o in base 16, necessita di 16 cifre; queste sono per convenzione

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

Come si vede, è stato necessario introdurre nuovi simboli (che poi altro non sono che le prime 6 lettere dell'alfabeto) per tener conto di tutte le cifre necessarie. Però questa complicazione nasconde il vantaggio che in tal caso i numeri vengono rappresentati con una piccola quantità di cifre e quindi anche grandi numeri risultano poco ingombranti.

Anche qui non ci sarebbe molto da dire, se non fosse che per una particolarità non casuale:  $16 = 2^4$ .

Questa particolarità determina una profonda interazione tra esadecimale e binario. In particolare un numero binario si può spezzare in gruppi di 4 cifre (a partire da destra) e ciascun gruppo va a comporre una cifra esadecimale e la sequenza di cifre esadecimali corrisponde al numero binario originale. Anche se già intuite il perché, vediamo in dettaglio come questo avviene.

Consideriamo ad esempio il numero binario 110110001 e scriviamolo per esteso

$$110110001_2 = 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Notiamo che si può raggruppare così

$$\begin{aligned} 110110001_2 &= (1 \cdot 2^8) + (1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4) + (0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = \\ &= (1 \cdot 2^0)2^8 + (1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)2^4 + (0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)2^0 = \\ &= (1 \cdot 2^0)16^2 + (1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)16^1 + (0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)16^0 = \\ &= 1 \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = \\ &= 1B1_{16} \end{aligned}$$

Questa semplicità di conversione da binario a esadecimale rimane, anche se un po' peggiorata, da esadecimale a binario. Infatti una volta capaci di convertire le 16 cifre esadecimali in blocchi di 4 cifre binarie (attenzione in questo caso a non trascurare gli 0 iniziali) la conversione è avvenuta. Queste 16 "conversioni fondamentali" possono anche essere conservate in una tabella e così non c'è da fare alcun conto.

Giusto un esempio pratico: nei pc ordinari sono visualizzabili  $2^{24} = 16777216$  colori, ottenibili come combinazioni di 3 colori, Red, Green, Blue (RGB). Nella specificazione del colore si immagina di aggiungere al nero (assenza di colore) delle parti di ciascun colore. Ogni colore può dare  $256 = 2^8 = 16^2$  contributi differenti, cosicché nel complesso si hanno infatti  $256^3 = 16^6 = 2^{24}$  combinazioni possibili.

Che 256 sia proprio  $16^2$  non è un caso: infatti in tal modo, in esadecimale il contributo di ciascun colore può variare da 0 a FF, cioè da 0 a 255.

Però così si può scrivere la combinazione dei 3 colori come se fosse un unico numero, di 6 cifre esadecimali, e non 3 distinti numeri per un totale di 9 cifre decimali.

Ad esempio, il viola, corrisponde a FF00FF che significa FF, 00, FF, cioè tutto rosso, niente verde, tutto blu.

### 2.3 Il sistema ottale

Sul sistema ottale non c'è assolutamente altro da dire: usa le 8 cifre da 0 a 7 e gode della capacità di conversione facilitata con il binario come l'esadecimale, ma in questo caso, essendo  $8 = 2^3$ , i blocchi binari devono essere di 3 cifre.

Posso solo aggiungere che tra i sistemi citati questo è di gran lunga quello meno usato.