



A.A. 2005 - 2006



Trasformazioni di Lorentz pure e operatori di riflessione
e loro applicazioni per lo studio di
trasporto di Fermi-Walker
e precessione di Thomas

Candidato: Marco Bonvini

Relatore: Enrico Massa

Data di laurea: 19 luglio 2006

Indice

| | |
|---|-----------|
| Introduzione | 1 |
| 1 Trasformazione di Lorentz | 3 |
| 1.1 Generalità | 3 |
| 1.2 Lo spazio-tempo di Minkowski | 5 |
| 1.2.1 Operatori di proiezione | 6 |
| 1.3 Operatori di riflessione | 8 |
| 1.3.1 Osservazioni | 12 |
| 2 Il trasporto di Fermi-Walker | 13 |
| 2.1 Posizione del problema | 13 |
| 2.2 La legge di trasporto | 14 |
| 3 La precessione di Thomas | 17 |
| 3.1 Rotazione di una terna non ruotante | 17 |
| 3.2 Precessione dello spin | 20 |
| Bibliografia | 23 |

Introduzione

In questo lavoro, dando per noti gli aspetti principali della teoria della relatività speciale, viene presentato un approccio geometrico alla teoria delle trasformazioni di Lorentz pure, discutendone poi l'applicazione allo studio di alcuni fenomeni relativistici.

Il lavoro si divide in due parti.

Nella prima, dopo un breve richiamo dei concetti fondamentali della teoria delle trasformazioni di Lorentz, si imposta il problema della scrittura delle trasformazioni stesse in linguaggio geometrico. Questo studio, effettuato nell'ambiente dello spazio-tempo di Minkowski, porta all'introduzione di opportuni *operatori di riflessione*, in grado di rappresentare una generica trasformazione pura in modo semplice e di facile applicabilità.

A parte altri vantaggi concettuali, l'argomento serve anche a razionalizzare la notazione vettoriale, comunemente usata nella rappresentazione tradizionale delle trasformazioni pure, in sé e per sé illegittima, in quanto espressione di un legame tra vettori appartenenti a spazi diversi. Come vedremo l'uso degli operatori di proiezione consente di superare completamente tale tipo di difficoltà.

Nella seconda parte discuteremo due applicazioni di quanto detto: il *trasporto di Fermi-Walker* e la *precessione di Thomas*. Entrambi gli argomenti sono legati al concetto di non rotazione di un sistema in moto qualsiasi in ambito relativistico. Quello che emerge nel corso della discussione è che il criterio classico di non rotazione non ha carattere Lorentz-invariante, per cui è necessario sostituirlo con un criterio più raffinato. La geometrizzazione di quest'ultimo conduce all'identificazione di una ben precisa legge di trasporto, nota in letteratura come trasporto di Fermi-Walker, atta a stabilire come debba evolvere lungo una generica linea di universo una terna di assi spaziali ortonormali in modo tale da rispettare un criterio intrinseco di non rotazione.

Una conseguenza apparentemente paradossale di tale criterio è che un corpo non ruotante in moto accelerato apparirà in generale dotato di una velocità angolare non nulla nel giudizio di ogni osservatore inerziale. Tale fenomeno va sotto il nome di precessione di Thomas.

Per sviluppare questi argomenti occorre lavorare con trasformazioni di Lorentz pure, visto il legame tra queste e il concetto di non rotazione. Come vedremo, gli operatori di riflessione si rivelano uno strumento particolarmente adatto allo scopo.

Notazioni

Nel testo sono usate le seguenti convenzioni notazionali:

- x : elementi di M_4 , indicati con le lettere minuscole;
- X, \mathbf{u} : vettori in \mathcal{V}_4 , o quadrivettori, indicati o con lettere maiuscole o in grassetto;
- \vec{x} : vettori nel trispazio di un generico osservatore inerziale, indicati con una freccia;
- $\frac{D}{Ds}$: indica la derivata assoluta, ovvero la derivata di un vettore calcolata in modo tale che prescindendo dalla scelta di un sistema di coordinate;
- (\cdot, \cdot) : indica il prodotto scalare in uno spazio vettoriale (in particolare in \mathcal{V}_4);
- \wedge : indica il prodotto vettore nel trispazio di un osservatore;
- X^i : con gli indici alti si indicano le componenti controvarianti di un vettore in \mathcal{V}_4 ;
- X_i : con gli indici bassi si indicano le componenti covarianti di un vettore in \mathcal{V}_4 ;
- $[x^0, \vec{x}]$: rappresenta le componenti temporale e spaziali di un quadrivettore in un dato sistema di riferimento.

Gli indici greci prendono i valori 1, 2, 3; quelli latini i valori 0, 1, 2, 3. Ove non diversamente specificato è sottintesa la somma sugli indici ripetuti.

Capitolo 1

Trasformazione di Lorentz

1.1 Generalità

Come è noto una trasformazione di Lorentz esprime il legame tra le coordinate spazio-temporali di eventi visti in differenti sistemi di riferimento inerziali. Per dedurre la trasformazione di Lorentz si suppone che la velocità della luce nel vuoto assuma lo stesso valore c in ogni sistema di riferimento inerziale; ciò equivale alla richiesta che un fronte d'onda sferica di un segnale a velocità c che ha origine al centro di un sistema di coordinate pseudo-cartesiane si propaghi allo stesso modo per ogni altro osservatore, ovvero che, dette x^α le coordinate spaziali e $x^0 = ct$,

$$s^2 = (x^0)^2 - [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] \quad (1.1)$$

sia un oggetto invariante, chiamato *intervallo*. Tale oggetto ha lo stesso significato di una distanza in uno spazio metrico: passando ai differenziali si può definire l'intervallo invariante infinitesimo ds^2 come

$$ds^2 = -\eta_{ij} dx^i dx^j \quad , \quad (1.2)$$

dove η_{ij} è il tensore metrico e ha la forma

$$\eta_{ij} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (1.3)$$

Da queste premesse si può vedere (cfr., ad esempio, [5], oppure [4]) che il legame tra le coordinate x^i associate ad un sistema \mathcal{I} e le nuove coordinate x'^i associate ad un sistema \mathcal{I}' in moto rettilineo uniforme rispetto ad \mathcal{I} è dato da

$$x'^i = \Lambda^i_j x^j \quad , \quad (1.4)$$

dove la matrice Λ^i_j soddisfa la condizione (di appartenenza al gruppo di Lorentz)

$$\eta_{ij}\Lambda^i_r\Lambda^j_s = \eta_{rs} \quad \Leftrightarrow \quad {}^t\Lambda\eta\Lambda = \eta \quad . \quad (1.5)$$

Nella pratica, almeno in ambito macroscopico, è sufficiente restringere la scelta di Λ ad un sottogruppo del gruppo di Lorentz, detto *sottogruppo proprio ortocrono* e indicato con L_+^\uparrow , in cui sono escluse le inversioni temporali e le inversioni spaziali. Le matrici $\Lambda \in L_+^\uparrow$ sono esprimibili in modo unico (si veda [2]) come prodotto

$$\Lambda = \Omega \cdot \Lambda_p \quad , \quad (1.6)$$

in cui Ω rappresenta una rotazione spaziale e la matrice Λ_p una *trasformazione di Lorentz pura*, ovvero priva di rotazione. Si dimostra che la matrice Λ_p rappresenta una trasformazione pura se e solo se essa è *simmetrica* e *definita positiva*.

Una trasformazione di Lorentz pura può essere scritta in forma vettoriale (sempre [2]):

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{c^2} \right) \quad (1.7a)$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v} \left[(\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{v^2} - \gamma t \right] \quad (1.7b)$$

dove \vec{v} è la velocità di \mathcal{I}' rispetto a \mathcal{I} e al solito $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$.

In realtà, come già ricordato nell'Introduzione, nella scrittura (1.7b) la notazione vettoriale ha solo un significato formale, in quanto i “vettori” \vec{x} , \vec{x}' appartengono a spazi diversi. In questo senso, l'equazione (1.7b) esprime solo ed esclusivamente una relazione tra terne di numeri, senza alcuna valenza genuinamente geometrica.

Vediamo come superare questo aspetto.

1.2 Lo spazio-tempo di Minkowski

In teoria della relatività lo spazio e il tempo si fondono in un'unica entità, detta lo **spazio-tempo di Minkowski**, uno spazio astratto quadridimensionale formato dalla totalità degli *eventi*, e denominato M_4 .

M_4 ha una struttura naturale di varietà differenziabile; in essa esiste una famiglia speciale \mathcal{H}_0 di sistemi di coordinate globali, formata dalla totalità dei sistemi di coordinate associati a sistemi di riferimento inerziali (sono di questo tipo le coordinate che figurano in (1.4)).

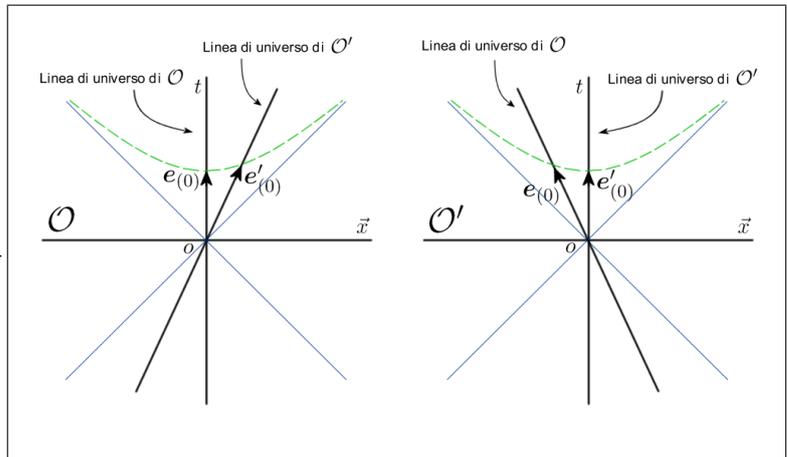
Essendo \mathcal{H}_0 per costruzione chiusa rispetto al gruppo di Poincaré, come dimostrato in [3] M_4 possiede una struttura canonica di *spazio affine*, e ciascun elemento $h \in \mathcal{H}_0$ rappresenta un sistema di coordinate affini.

Lo spazio modellatore di M_4 , denominato \mathcal{V}_4 , è uno spazio vettoriale quadridimensionale che, per la condizione di invarianza dell'intervallo, espressa dall'equazione (1.1), viene automaticamente fornito di un prodotto scalare¹ $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V}_4 \times \mathcal{V}_4 \rightarrow \mathbb{R}$, con metrica data dal tensore metrico η , definito dalla (1.3).

Subordinatamente alla scelta di un'origine $o \in M_4$, ogni evento $x \in M_4$ viene rappresentato in \mathcal{V}_4 da un vettore $X := x - o$.

Inoltre si capisce che, data l'arbitrarietà con cui si possono orientare gli assi spaziali, l'unico elemento significativo che caratterizza \mathcal{O} è l'orientazione dell'asse temporale. Chiamiamo il versore dell'asse temporale $e_{(0)}$.

Infatti, ogni altro osservatore inerziale in moto rispetto ad \mathcal{O} sarà a sua volta identificato da un proprio versore temporale, ovvero il vettore tangente alla sua linea di universo.



La scelta di un osservatore inerziale \mathcal{O} si manifesta quindi nell'assegnazione del versore temporale $e_{(0)}$: l'orientazione dei versori spaziali è lasciata arbitraria, fermo restando la richiesta che questi formino base ortonormale nel trispazio $e_{(0)}^\perp = \{X \mid X \in \mathcal{V}_4, (X, e_{(0)}) = 0\}$.

Nello spazio M_4 è possibile, in infiniti modi, introdurre coordinate affini pseudo-cartesiane: a tale scopo, scelta ad arbitrio una terna ortonormale $\{e_{(\alpha)}\}$ in $e_{(0)}^\perp$ e aggiungendovi il versore $e_{(0)}$, si ottiene una base pseudo-ortonormale $\{e_{(i)}\}$ in \mathcal{V}_4 . A questo punto, scelta un'origine $o \in M_4$,

¹Non essendo questo prodotto scalare positivo, si può definire, con un parziale abuso di linguaggio, la *norma* del vettore X come $\|X\| = \sqrt{|(X, X)|}$.

per ogni evento $x \in M_4$ si definiscono le coordinate affini pseudo-cartesiane $x^i(\cdot)$ su M_4 ²:

$$x^i(x) = \eta^{ij} \left((x - o), e_{(j)} \right) . \quad (1.8)$$

Tali coordinate sono proprio gli elementi che costituiscono i sistemi di coordinate della famiglia \mathcal{H}_0 .

1.2.1 Operatori di proiezione

Da queste premesse si vede che la trasformazione tra un riferimento inerziale \mathcal{I} e un altro riferimento inerziale \mathcal{I}' altro non è che una trasformazione di base in \mathcal{V}_4 ; visto che la trasformazione dei soli $\{e_{(\alpha)}\}$ altro non è che un cambiamento della base del trispazio $e_{(0)}^\perp$, cioè una rotazione³, la parte di trasformazione di Lorentz davvero interessante, cioè la trasformazione pura, sarà contenuta nella trasformazione di $e_{(0)}$, che rappresenta il vero elemento identificante sistemi inerziali. È altrettanto evidente però che la trasformazione di $e_{(0)}$ induce automaticamente una trasformazione degli $e_{(\alpha)}$, dato che $e_{(0)}^\perp$ si trasforma anch'esso.

Ciò non fa che ribadire quanto già detto relativamente alla scrittura della trasformazione di Lorentz pura nella forma (1.7): i “vettori” posizione ivi richiamati non sono veri vettori, perché non sono oggetti invarianti, e inoltre quella relazione è inadeguata in quanto lega due oggetti appartenenti a spazi diversi ($\vec{x} \in e_{(0)}^\perp$, $\vec{x}' \in e'_{(0)}^\perp$).

Per costruire una trasformazione di Lorentz che sia corretta geometricamente occorrerà riferirsi a veri oggetti geometrici. A tale scopo introduciamo due **operatori di proiezione**, definiti dalle relazioni

$$\mathcal{P}_\Theta(X) := - (X, e_{(0)}) , \quad (1.9a)$$

$$\mathcal{P}_\Sigma(X) := X - \mathcal{P}_\Theta(X) e_{(0)} , \quad (1.9b)$$

dove $\mathcal{P}_\Theta : \mathcal{V}_4 \rightarrow \mathbb{R}$ è la *proiezione temporale* e $\mathcal{P}_\Sigma : \mathcal{V}_4 \rightarrow e_{(0)}^\perp$ è la *proiezione spaziale*.

Questi operatori possono essere messi in relazione con le componenti affini dei vettori che figurano nella trasformazione (1.4) definite in (1.8): infatti, ricordando che vale sempre $X = x - o$, elementarmente si ha

$$\begin{aligned} x^0(x) &= \mathcal{P}_\Theta(x - o) , \\ x^\alpha(x) &= \left(\mathcal{P}_\Sigma(x - o), e_{(\alpha)} \right) . \end{aligned}$$

² Il vettore X scritto in funzione delle sue componenti *controvarianti* risulta $X = x - o = x^i(x) e_{(i)}$, mentre il prodotto scalare del vettore con gli elementi della base restituisce le componenti *covarianti* $x_i(x) = \left((x - o), e_{(i)} \right)$; Come è noto il legame tra le componenti covarianti e controvarianti è dato dal tensore metrico:

$$x^i = \eta^{ij} x_j , \quad x_i = \eta_{ij} x^j ,$$

dove (η^{ij}) è la matrice inversa di (η_{ij}) , che però ha le stesse componenti.

³ Si intende che la condizione di ortonormalità rimanga preservata.

Inoltre, dalla definizione (1.9), segue elementarmente che ogni vettore X può essere scomposto come

$$X = \mathcal{P}_\Theta(X) e_{(0)} + \mathcal{P}_\Sigma(X) \quad ,$$

il che porta alla relazione operatoriale

$$e_{(0)} \mathcal{P}_\Theta + \mathcal{P}_\Sigma = \mathbb{I} \quad . \tag{1.10}$$

Dato il carattere geometrico degli operatori sopra definiti, e il legame esplicito tra questi e il versore temporale $e_{(0)}$ e quindi con il sistema di riferimento \mathcal{I} , si intuisce facilmente che essi sono gli oggetti giusti per poter descrivere una trasformazione di Lorentz in un linguaggio invariante.

1.3 Operatori di riflessione

Seguendo un'idea di Barut [5] poi ripresa in [1], consideriamo adesso una speciale classe di operatori lineari sullo spazio \mathcal{V}_4 che, come vedremo, consentono di ricostruire in maniera semplice la più generale trasformazione di Lorentz pura.

Una riflessione rispetto ad un iperpiano in uno spazio vettoriale V avente un prodotto scalare si può scrivere

$$J_N(X) := X - 2 \frac{(X, N)}{(N, N)} N \quad \forall X \in V \quad ,$$

dove $N \in V$ è un vettore normale all'iperpiano rispetto a cui si riflette.

Barut [5] dimostra che, nel caso in cui si lavori nello spazio \mathcal{V}_4 , una qualsiasi trasformazione di Lorentz si può scrivere come prodotto di quattro riflessioni al massimo (ovviamente ciascuna con un proprio N).

Tuttavia l'interesse qui è quello di trovare un modo di implementare una trasformazione di Lorentz *pura*; per questo è sufficiente limitarsi a considerare i vettori unitari di tipo tempo orientati verso il futuro: chiamiamo l'insieme di tali vettori \mathcal{S}_3^+ , ovvero una pseudo-semisfera in \mathcal{V}_4 . Il fatto di aver scelto solo vettori di norma unitaria è unicamente un modo per semplificare la scrittura, e rende conto del fatto che un iperpiano è identificato semplicemente dalla *direzione* normale.

Dato $Z \in \mathcal{S}_3^+$, essendo per ipotesi $(Z, Z) = -1$, si può riscrivere l'operatore di riflessione come

$$J_Z(X) := X + 2 (X, Z) Z \quad \forall X \in \mathcal{V}_4 \quad . \quad (1.11)$$

Dalla definizione (1.11) seguono facilmente le seguenti proprietà:

$$(J_Z)^2 = \mathbb{I} \quad (1.12a)$$

$$J_Z(Z) = -Z \quad (1.12b)$$

$$(J_Z(X), X) > 0 \quad \forall X \in \mathcal{V}_4, X \neq 0 \quad (1.12c)$$

$$(J_Z(X), Y) = (X, J_Z(Y)) \quad \forall X, Y \in \mathcal{V}_4 \quad (1.12d)$$

$$(J_Z(X), J_Z(Y)) = (X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathcal{V}_4 \quad (1.12e)$$

Le prime due si ottengono semplicemente dalla definizione (1.11) per sostituzione; in particolare la (1.12a) si capisce automaticamente pensando che riflettendo due volte tutto torna come prima. Per la (1.12c), scomponendo il vettore X in una componente X^0 lungo Z e in un vettore \tilde{X} ortogonale a Z , si ha $X = X^0 Z + \tilde{X}$ e dalla definizione (1.11) $J_Z(X) = -X^0 Z + \tilde{X}$, da cui

$$(J_Z(X), X) = (X^0)^2 + \|\tilde{X}\|^2 \geq 0 \quad , \quad = 0 \Leftrightarrow X = 0 \quad .$$

Le ultime due si ricavano anch'esse semplicemente per calcolo diretto. In particolare la (1.12d) è conseguenza della (1.12a), ovvero del fatto che J_Z è involutorio; la (1.12e) esprime invece il fatto che l'operatore J_Z è un'isometria.

Vediamo adesso il legame tra J_Z e le trasformazioni di Lorentz pure: dato che, come già ricordato, la trasformazione pura è legata alla trasformazione del versore temporale $\mathbf{e}_{(0)}$ nel nuovo versore $\mathbf{e}'_{(0)}$, il versore Z che figura nella definizione di J_Z dovrà essere funzione di tali versori temporali. Inoltre, dato che dalla (1.12a) si ha che $J_Z = J_Z^{-1}$, visto che la trasformazione di Lorentz inversa sarà data da J_Z^{-1} allora, per le sostituzioni

$$\mathbf{e}_{(0)} \rightarrow \mathbf{e}'_{(0)} \quad , \quad \mathbf{e}'_{(0)} \rightarrow \mathbf{e}_{(0)} \quad ,$$

Z dovrà rimanere lo stesso. Il più semplice vettore appartenente a \mathcal{S}_3^+ e soddisfacente le condizioni precedenti è

$$Z := \frac{\mathbf{e}_{(0)} + \mathbf{e}'_{(0)}}{\|\mathbf{e}_{(0)} + \mathbf{e}'_{(0)}\|} . \quad (1.13)$$

Per scrivere Z in una forma più maneggevole è utile avere in luogo di $\mathbf{e}'_{(0)}$ un'espressione che dipenda da $\mathbf{e}_{(0)}$ e dalla velocità del sistema \mathcal{I}' rispetto al sistema \mathcal{I} . A tale scopo, facendo uso dell'identità (1.10), $\mathbf{e}'_{(0)}$ si può scomporre in

$$\mathbf{e}'_{(0)} = \mathcal{P}_\Theta(\mathbf{e}'_{(0)}) \mathbf{e}_{(0)} + \mathcal{P}_\Sigma(\mathbf{e}'_{(0)}) = \mathcal{P}_\Theta(\mathbf{e}'_{(0)}) \left[\mathbf{e}_{(0)} + \frac{\mathcal{P}_\Sigma(\mathbf{e}'_{(0)})}{\mathcal{P}_\Theta(\mathbf{e}'_{(0)})} \right] .$$

Dal momento che $\mathbf{e}'_{(0)}$ rappresenta il vettore tangente alla linea di universo dell'osservatore \mathcal{O}' , allora per costruzione il rapporto $\frac{\mathcal{P}_\Sigma(\mathbf{e}'_{(0)})}{\mathcal{P}_\Theta(\mathbf{e}'_{(0)})}$ rappresenta la velocità, normalizzata a c , del sistema di riferimento \mathcal{I}' rispetto al sistema di riferimento \mathcal{I} , vista nel giudizio di \mathcal{I} . Si può allora introdurre il vettore velocità $\mathbf{v} \in \mathbf{e}_{(0)}^\perp$, definito dalla relazione $\mathbf{v} := c \frac{\mathcal{P}_\Sigma(\mathbf{e}'_{(0)})}{\mathcal{P}_\Theta(\mathbf{e}'_{(0)})}$; in questo modo l'equazione precedente si riscrive

$$\mathbf{e}'_{(0)} = \mathcal{P}_\Theta(\mathbf{e}'_{(0)}) \left(\mathbf{e}_{(0)} + \frac{\mathbf{v}}{c} \right) .$$

Calcolando il quadrato di ambo i membri dell'espressione precedente, si ottiene

$$-1 = \mathcal{P}_\Theta(\mathbf{e}'_{(0)})^2 \left(-1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_\Theta(\mathbf{e}'_{(0)}) = \gamma .$$

Si ottiene infine la relazione cercata:

$$\mathbf{e}'_{(0)} = \gamma \left(\mathbf{e}_{(0)} + \frac{\mathbf{v}}{c} \right) , \quad (1.14a)$$

e va da sé che vale la relazione “inversa”

$$\mathbf{e}_{(0)} = \gamma \left(\mathbf{e}'_{(0)} + \frac{\mathbf{v}'}{c} \right) , \quad (1.14b)$$

dove però $\mathbf{v}' \in \mathbf{e}'_{(0)}^\perp$, e in luogo della relazione non geometrica $\vec{v} = -\vec{v}'$ si ha solo $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}'\| := v$.

A questo punto, per il calcolo di Z , si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(0)} + \mathbf{e}'_{(0)} &= (1 + \gamma) \mathbf{e}_{(0)} + \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \quad , \\ \|\mathbf{e}_{(0)} + \mathbf{e}'_{(0)}\|^2 &= \left| -(1 + \gamma)^2 + \gamma \frac{v}{c} \right| = 2(1 + \gamma) \quad , \end{aligned}$$

da cui

$$Z = \frac{(1 + \gamma) \mathbf{e}_{(0)} + \gamma \frac{\mathbf{v}}{c}}{\sqrt{2(1 + \gamma)}} \quad . \quad (1.15)$$

Dalla definizione (1.11) con Z dato dalla (1.15) per confronto con le (1.14) e, tenendo conto che dalla (1.14a) $\mathbf{v} = c \left(\frac{1}{\gamma} \mathbf{e}'_{(0)} - \mathbf{e}_{(0)} \right)$ e dalla (1.14b) $\mathbf{v}' = c \left(\frac{1}{\gamma} \mathbf{e}_{(0)} - \mathbf{e}'_{(0)} \right)$, si trova immediatamente

$$J_Z(\mathbf{e}_{(0)}) = -\mathbf{e}'_{(0)} \quad , \quad J_Z(\mathbf{e}'_{(0)}) = -\mathbf{e}_{(0)} \quad , \quad (1.16a)$$

$$J_Z(\mathbf{v}) = c J_Z \left(\frac{1}{\gamma} \mathbf{e}'_{(0)} - \mathbf{e}_{(0)} \right) = c \left(-\frac{1}{\gamma} \mathbf{e}_{(0)} + \mathbf{e}'_{(0)} \right) = -\mathbf{v}' \quad . \quad (1.16b)$$

Già cominciano a vedersi degli effetti buoni: dall'unione di (1.12d) e (1.16a) si ottiene

$$0 = (\mathbf{e}_{(0)}, X) = - \left(J_Z(\mathbf{e}'_{(0)}), X \right) = - \left(\mathbf{e}'_{(0)}, J_Z(X) \right) \quad \forall X \in \mathbf{e}_{(0)}^\perp \quad , \quad (1.17)$$

da cui $J_Z(X) \in \mathbf{e}'_{(0)}^\perp$, cioè dalla (1.12e) J_Z mappa isometricamente il sottospazio $\mathbf{e}_{(0)}^\perp$ in $\mathbf{e}'_{(0)}^\perp$.

Dalle ultime due equazioni si vede il significato di un vettore spaziale come \mathbf{v} . È chiaro che \mathbf{v}' è il vettore che si è introdotto per rappresentare in \mathcal{V}_4 la velocità di \mathcal{I} rispetto a \mathcal{I}' , nel giudizio di \mathcal{I}' ; d'altro canto, la velocità di \mathcal{I}' rispetto a \mathcal{I} , ma sempre nel giudizio di \mathcal{I}' , è $-\mathbf{v}'$: l'equazione (1.16b) mostra che tale velocità, che classicamente coinciderebbe con \vec{v} nel giudizio di *ogni* osservatore, è data da $J_Z(\mathbf{v})$; e non si dimentichi che \mathbf{v} è la velocità di \mathcal{I}' rispetto a \mathcal{I} , ma nel giudizio di \mathcal{I} .

Ciò dimostra che, benché i vettori \mathbf{v} , \mathbf{v}' non siano utili come oggetti invarianti (perché la velocità non è un concetto invariante), di fatto il legame tra vettori diversi (perché costruiti in riferimenti diversi) ma afferenti allo stesso concetto (in questo caso la velocità di un sistema rispetto ad un altro) è molto semplice ed è dato dall'operatore J_Z ; non solo, ma dalla (1.17) si vede che questo ragionamento va bene per ogni *vettore spaziale* introdotto in questo modo.

Inoltre, dalle definizioni (1.9) e (1.11), utilizzando sempre la (1.12d), si ha

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{e}'_{(0)}, J_Z \mathcal{P}_\Sigma J_Z(X) \right) &= \left(J_Z(\mathbf{e}'_{(0)}), \mathcal{P}_\Sigma J_Z(X) \right) = - \left(\mathbf{e}_{(0)}, J_Z(X) - \mathcal{P}_\Theta(J_Z(X)) \mathbf{e}_{(0)} \right) = \\ &= - \left(\mathbf{e}_{(0)}, J_Z(X) \right) - \mathcal{P}_\Theta(J_Z(X)) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{V}_4 \quad , \end{aligned}$$

che indica che $J_Z \mathcal{P}_\Sigma J_Z(X) \in \mathbf{e}'_{(0)}^\perp$ per ogni $X \in \mathcal{V}_4$.

Ora, dalla (1.10) e dalla (1.12a), si ottiene la relazione

$$J_Z \left[\mathcal{P}_\Sigma + \mathbf{e}_{(0)} \mathcal{P}_\Theta \right] J_Z = J_Z \mathbb{I} J_Z = (J_Z)^2 = \mathbb{I} = \mathcal{P}'_\Sigma + \mathbf{e}'_{(0)} \mathcal{P}'_\Theta \quad . \quad (1.18)$$

Dalle relazioni precedenti, per l'unicità della decomposizione spaziale e temporale di un vettore, ricordando la (1.16a) si ottengono le due relazioni indipendenti

$$\mathcal{P}'_{\Theta} = -\mathcal{P}_{\Theta} J_Z \quad , \quad (1.19a)$$

$$\mathcal{P}'_{\Sigma} = J_Z \mathcal{P}_{\Sigma} J_Z \quad . \quad (1.19b)$$

Queste equazioni mettono in relazione i nuovi operatori di proiezione riferiti ad \mathcal{I}' con i vecchi riferiti ad \mathcal{I} , che è proprio quanto stavamo cercando.

Il legame tra le equazioni (1.19) e la teoria delle trasformazioni pure è data dal seguente

Teorema 1.1. *Sia $\{\mathbf{e}_{(\alpha)}\}$ base ortonormale di $\mathbf{e}_{(0)}^{\perp}$, cosicché completata con $\mathbf{e}_{(0)}$ si ottenga una base pseudo-ortonormale di \mathcal{V}_4 .*

Allora:

(i) $\{\mathbf{e}'_{(\alpha)} := J_Z(\mathbf{e}_{(\alpha)})\}$ è una base ortonormale di $\mathbf{e}'_{(0)}^{\perp}$;

(ii) le basi $\{\mathbf{e}_{(i)}\}$ e $\{\mathbf{e}'_{(i)}\}$ (o, più precisamente, i corrispondenti sistemi di coordinate pseudo-cartesiane in M_4) sono legate da una **trasformazione di Lorentz pura**.

Dimostrazione. La (i) è immediata, in quanto dalla (1.17) si vede che $J_Z(\mathbf{e}_{(\alpha)}) \in \mathbf{e}'_{(0)}^{\perp}$ e dalla (1.12e) si ha

$$\delta_{\alpha\beta} = (\mathbf{e}_{(\alpha)}, \mathbf{e}_{(\beta)}) = (J_Z(\mathbf{e}_{(\alpha)}), J_Z(\mathbf{e}_{(\beta)})) = (\mathbf{e}'_{(\alpha)}, \mathbf{e}'_{(\beta)}) \quad .$$

Per la (ii), dalla definizione di $\mathbf{e}'_{(\alpha)}$, ricordando la (1.16a) si ha

$$\eta^{ij} \mathbf{e}'_{(j)} = J_Z(\mathbf{e}_{(i)}) \quad ; \quad (1.20)$$

dalla definizione (1.8), per ogni evento $x \in M_4$ la relazione tra le nuove coordinate affini x'^i riferite ad \mathcal{I}' e le vecchie x^i riferite ad \mathcal{I} , usando un'origine comune $o \in M_4$, è data da

$$x'^i(x) = \eta^{ij} \left((x - o), \mathbf{e}'_{(j)} \right) = \left((x - o), J_Z(\mathbf{e}_{(i)}) \right) = x^j(x) \left(\mathbf{e}_{(j)}, J_Z(\mathbf{e}_{(i)}) \right) \quad .$$

Tale relazione risulta essere della forma

$$x'^i(x) = \Lambda^i_j x^j(x) \quad ,$$

dove la matrice $\Lambda^i_j := (\mathbf{e}_{(j)}, J_Z(\mathbf{e}_{(i)}))$ risulta simmetrica e definita positiva rispettivamente per la (1.12d) e la (1.12c).

Come si è richiamato nel § 1.1, una matrice con tali proprietà rappresenta una trasformazione di Lorentz pura. \square

Questo risultato permette di attribuire un ruolo importante all'operatore J_Z , dato che la sua azione su un vettore $X \in \mathbf{e}_{(0)}^{\perp}$ produce un vettore $J_Z(X) \in \mathbf{e}'_{(0)}^{\perp}$ con un criterio intrinseco di non rotazione. Ciò significa che J_Z implementa in modo geometricamente semplice una trasformazione pura.

1.3.1 Osservazioni

Le equazioni (1.19) rappresentano la trasformazione “diretta”. Per ottenere la trasformazione inversa si capisce già intuitivamente che, proprio per questioni relativistiche, la forma sarà la stessa sostituendo J_Z col suo inverso; d'altronde dalla (1.12a) si ha $J_Z = J_Z^{-1}$. Infatti

$$-\mathcal{P}'_{\Theta} J_Z = -(-\mathcal{P}_{\Theta} J_Z) J_Z = \mathcal{P}_{\Theta} \quad , \quad (1.21a)$$

$$J_Z \mathcal{P}'_{\Sigma} J_Z = J_Z (J_Z \mathcal{P}_{\Sigma} J_Z) J_Z = \mathcal{P}_{\Sigma} \quad . \quad (1.21b)$$

È possibile scrivere la trasformazione (1.19) in una forma più esplicita e suggestiva; facendo uso delle definizioni (1.11), (1.15) e della relazione (1.10), notando che

$$\frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} = \frac{\gamma-1}{v^2} \quad (1.22)$$

e calcolando

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\Theta}(Z) &= \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} \quad , \\ \mathcal{P}_{\Sigma}(Z) &= \frac{\gamma}{c\sqrt{2(1+\gamma)}} \mathbf{v} \quad , \end{aligned}$$

si trova che

$$\mathcal{P}'_{\Theta} = \gamma \left[\mathcal{P}_{\Theta} - \frac{(\mathbf{v}, \mathcal{P}_{\Sigma})}{c} \right] \quad , \quad (1.23a)$$

$$\mathcal{P}'_{\Sigma} = J_Z \left\{ \mathcal{P}_{\Sigma} + \mathbf{v} \left[(\gamma-1) \frac{(\mathbf{v}, \mathcal{P}_{\Sigma})}{v^2} - \frac{\gamma}{c} \mathcal{P}_{\Theta} \right] \right\} \quad . \quad (1.23b)$$

È bello osservare che, identificando $\mathcal{P}_{\Theta} \leftrightarrow ct$ e $\mathcal{P}_{\Sigma} \leftrightarrow \vec{x}$, la forma della (1.23) è analoga alla rappresentazione standard (1.7) della trasformazione di Lorentz pura.

Per ottenere la trasformazione inversa in questa forma, dalle (1.23) usando le (1.19), (1.21) e (1.12a), si trova

$$\mathcal{P}_{\Theta} = \gamma \left[\mathcal{P}'_{\Theta} + \frac{(J_Z(\mathbf{v}), \mathcal{P}'_{\Sigma})}{c} \right] \quad , \quad (1.24a)$$

$$\mathcal{P}_{\Sigma} = J_Z \left\{ \mathcal{P}'_{\Sigma} + J_Z(\mathbf{v}) \left[(\gamma-1) \frac{(J_Z(\mathbf{v}), \mathcal{P}'_{\Sigma})}{v^2} + \frac{\gamma}{c} \mathcal{P}'_{\Theta} \right] \right\} \quad . \quad (1.24b)$$

Capitolo 2

Il trasporto di Fermi-Walker

2.1 Posizione del problema

In cinematica classica è possibile stabilire in maniera non ambigua se un corpo ruota o non ruota.

L'idea è semplice: si considera un osservatore inerziale e si guarda ad ogni istante quale trasformazione lega tale osservatore al sistema istantaneamente solidale col corpo (supposto rigido); se tale trasformazione è una trasformazione di Galileo con al più una rotazione *non* dipendente dal tempo, allora il corpo è *non ruotante* nel giudizio di *qualsiasi* osservatore inerziale.

Tale asserzione è conseguenza immediata del fatto che nella composizione di moti le velocità angolari si sommano vettorialmente. Infatti, in tal modo, se nel giudizio di un osservatore inerziale un corpo ha velocità angolare nulla (non ruota), allora ogni altro osservatore inerziale legato al primo da una trasformazione di Galileo vedrà il corpo non ruotare.

In cinematica relativistica le cose non sono così semplici.

A prima vista, si può pensare di considerare la successione degli infiniti sistemi di riferimento istante per istante solidali al corpo in moto (detti sistema di moto incipiente), e vedere se ciò che lega questi sistemi ad un osservatore di riferimento è una trasformazione di Lorentz pura composta eventualmente con una rotazione costante.

Visto che trasformazione pura e rotazione non commutano [2], si può pensare di eseguire prima la rotazione Ω' sul corpo e poi la trasformazione pura Λ'_t dal corpo all'osservatore; tuttavia un altro osservatore inerziale, legato in generale all'osservatore di riferimento da una trasformazione pura Λ composta con una rotazione Ω , vedrà il corpo con la trasformazione $\Omega\Lambda\Lambda'_t\Omega'$. A differenza di quanto accade nel caso classico, tuttavia, le trasformazioni di Lorentz pure non formano sottogruppo [2]. In generale, quindi, si avrà una fattorizzazione $\Lambda\Lambda'_t = \tilde{\Lambda}_t\tilde{\Omega}_t$, ovvero oltre ad una trasformazione pura $\tilde{\Lambda}_t$ dipendente dal tempo ci sarà anche una rotazione $\tilde{\Omega}_t$ dipendente dal tempo. Quindi, nel giudizio del nuovo osservatore, il corpo sarà visto ruotare.

Il procedimento ipotizzato non fornisce quindi un buon criterio di non rotazione, in quanto non ha carattere invariante al variare dell'osservatore.

Un criterio più corretto, e più direttamente legato al principio di corrispondenza tra Fisica Classica e Fisica Relativistica alle basse velocità, è ottenibile coinvolgendo solo ed esclusivamente il sistema di moto incipiente, ed esaminando ivi l'atto di moto di un corpo, ossia la trasformazione tra il sistema istantaneamente in quiete con il corpo all'istante τ e quello all'istante successivo $\tau + \delta\tau$: se essa è pura $\forall\tau$ allora il corpo sarà detto non ruotare.

Si osservi che, pur non ruotando, il trispazio associato al sistema di moto incipiente dovrà comunque cambiare, perché la trasformazione pura si configura in ogni caso come una pseudo-rotazione in \mathcal{V}_4 .

Per studiare questo effetto è sufficiente stabilire come varia l'orientazione del trispazio solidale col corpo nel corso dell'evoluzione; un modo elegante per ottenere questo risultato è lo studio della *legge di trasporto di Fermi-Walker*.

2.2 La legge di trasporto

Come è noto, in cinematica relativistica esiste il concetto di quadrivelocità e di quadriaccelerazione, definite rispettivamente da (si veda ad esempio [6] o [7]):

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \left[\gamma, \gamma \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad , \quad w^i = \frac{du^i}{ds} \quad ,$$

in cui s indica l'ascissa curvilinea (o meglio, il tempo proprio) lungo la linea di universo φ rappresentativa dell'evoluzione dell'oggetto in esame.

Dalla definizione stessa segue immediatamente che \mathbf{u} e \mathbf{w} sono ortogonali: infatti, essendo $u^i u_i = -1$, si ha

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d(u^i u_i)}{ds} = u_i \frac{du^i}{ds} = u_i w^i = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad . \quad (2.1)$$

La quadrivelocità \mathbf{u} di un oggetto, nel sistema di moto incipiente, ha componenti $[1, \vec{0}]$, cioè esattamente le stesse del versore temporale del riferimento stesso; inoltre $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_3^+$. Ciò significa che di fatto il vettore \mathbf{u} è il versore temporale, ad ogni istante, del sistema di riferimento istantaneamente in quiete con l'oggetto.

Per non creare confusione tra componenti spaziali di \mathbf{u} e la terna di vettori base del trispazio associato al sistema di moto incipiente, chiamiamo $\{\lambda_{(i)}\}$ la base di \mathcal{V}_4 relativa a tale sistema, con l'identificazione $\lambda_{(0)} := \mathbf{u}$.

Dopo queste premesse chiediamoci adesso come varî in \mathcal{V}_4 un campo vettoriale $X(s)$ lungo φ , nell'ipotesi che tale campo appaia costante nel giudizio di un osservatore che evolve lungo φ , e i cui assi spaziali risultino non ruotare, nel senso prima enunciato.

Per rispondere a tale quesito occorre in primo luogo esprimere in formule il concetto di non

rotazione nel sistema di moto incipiente, e poi applicare il risultato allo studio dell'evoluzione del vettore.

Come evidenzia il Teorema 1.1 J_Z ha l'effetto di trasformare i versori spaziali di un riferimento inerziale \mathcal{I} in quelli di un riferimento \mathcal{I}' , dando luogo ad una trasformazione pura, ossia obbedendo ad un criterio di non rotazione. L'operatore J_Z sembra quindi essere l'oggetto giusto per realizzare in modo semplice il compito di passare da un riferimento ad un altro con una trasformazione priva di rotazione.

Il concetto invariante di non rotazione enunciato in precedenza consiste nel passare con una trasformazione pura dal sistema $\mathcal{F}(s)$ al sistema $\mathcal{F}(s + \delta s)$, cioè i sistemi istantaneamente in quiete con il corpo in moto rispettivamente all'istante τ e $\tau + \delta\tau$ ($s = c\tau$).

Per utilizzare J_Z occorre allora costruire il vettore intermedio $Z \in \mathcal{S}_3^+$ dato dalla (1.13):

$$Z(s, s + \delta s) = \frac{\boldsymbol{\lambda}_{(0)}(s) + \boldsymbol{\lambda}_{(0)}(s + \delta s)}{\|\boldsymbol{\lambda}_{(0)}(s) + \boldsymbol{\lambda}_{(0)}(s + \delta s)\|} = \boldsymbol{\lambda}_{(0)}(s) + \frac{1}{2} \frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(0)}}{Ds}(s) \delta s + \mathcal{O}rd(\delta s^2) \quad , \quad (2.2)$$

dove si è tenuto conto della (2.1).

A questo punto tramite la definizione (1.11) si può costruire l'operatore cercato: $J_{Z(s, s+\delta s)}$.

Passiamo al secondo problema, la trasformazione di un vettore: l'equazione (1.20) può essere riscritta in forma operatoriale nella forma

$$\mathbf{e}'_{(i)} = J_Z \eta(\mathbf{e}_{(i)}) \quad . \quad (2.3)$$

Ora, per la linearità degli operatori η e J_Z , ogni vettore X che mantenga costanti le sue componenti (ovvero che appaia lo stesso nel giudizio di entrambi gli osservatori) si trasformerà in questo stesso modo. Infatti, decomposto il vettore $X = X^0 \mathbf{e}_{(0)} + X^\alpha \mathbf{e}_{(\alpha)}$, dalle (1.16a) e (1.20) si ha

$$X' = J_Z \eta(X) = J_Z \eta(X^0 \mathbf{e}_{(0)} + X^\alpha \mathbf{e}_{(\alpha)}) = X^0 \mathbf{e}'_{(0)} + X^\alpha \mathbf{e}'_{(\alpha)} \quad . \quad (2.4)$$

Uniamo le cose. Per trovare la trasformazione di un campo $X(s)$ si potrà procedere trasformando unicamente gli elementi della base $\{\boldsymbol{\lambda}_{(i)}(s)\}$ nei nuovi $\{\boldsymbol{\lambda}_{(i)}(s + \delta s)\}$. La trasformazione di $\boldsymbol{\lambda}_{(0)}$ è il punto di partenza, dato che si tratta della quadrivelocità ed è l'unica cosa che si assume di conoscere.

La trasformazione dei $\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}$, tenendo conto che $\eta(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}) = \boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}$, e ricordando le (1.11), (2.2) e (2.3), è data da ¹

$$\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}(s + \delta s) = J_{Z(s, s+\delta s)}(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}(s)) = \boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}(s) + \left(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}(s), \frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(0)}}{Ds}(s) \right) \boldsymbol{\lambda}_{(0)}(s) \delta s + \mathcal{O}rd(\delta s^2) \quad ,$$

da cui

$$\frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}}{Ds} = \left(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}, \frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(0)}}{Ds} \right) \boldsymbol{\lambda}_{(0)} \quad . \quad (2.5)$$

¹ Non si dimentichi che $(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}, \boldsymbol{\lambda}_{(0)}) = 0$.

Tenendo conto della scomposizione in componenti di $X = X^i \boldsymbol{\lambda}_{(i)}$, dove $X^0 = - (X, \boldsymbol{\lambda}_{(0)})$, e della costanza di tali componenti, per il trasporto di un vettore si ha

$$\frac{DX}{Ds} = \frac{D}{Ds} (X^0 \boldsymbol{\lambda}_{(0)} + X^\alpha \boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}) = - (X, \boldsymbol{\lambda}_{(0)}) \frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(0)}}{Ds} + \left(X, \frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(0)}}{Ds} \right) \boldsymbol{\lambda}_{(0)} \quad . \quad (2.6)$$

L'equazione (2.6) va sotto il nome di *legge di trasporto di Fermi-Walker*.

Nel caso in cui si abbia a che fare con un vettore Y spaziale, cioè soddisfacente $(Y, \boldsymbol{\lambda}_{(0)}) = 0$, la (2.6) si riduce alla *legge di trasporto di Fermi*:

$$\frac{DY}{Ds} = \left(Y, \frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(0)}}{Ds} \right) \boldsymbol{\lambda}_{(0)} \quad . \quad (2.7)$$

Capitolo 3

La precessione di Thomas

3.1 Rotazione di una terna non ruotante

Si supponga di avere un corpo in moto qualsiasi ma che non ruoti, nel senso stabilito nel capitolo precedente; si indichi con $\mathcal{F} = \mathcal{F}(s)$ il sistema di moto incipiente.

Si consideri un osservatore inerziale \mathcal{I} ; nel giudizio di tale osservatore il sistema \mathcal{F} risulterà in generale ruotare, con una velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(s)$.

Tale fenomeno prende il nome di *precessione di Thomas*, e il nocciolo della questione è la determinazione di $\boldsymbol{\omega}$.

Con gli strumenti di cui ormai disponiamo (operatori di riflessione, trasporto di Fermi-Walker) la soluzione del problema è molto semplice.

Si indichi con $\{\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}(s)\}$ una terna ortonormale, base di $\boldsymbol{\lambda}_{(0)}^\perp(s)$, e con $\boldsymbol{\lambda}_{(0)}(s)$ il versore temporale relativo a $\mathcal{F}(s)$; si supponga che nel corso dell'evoluzione del corpo lungo la linea di universo φ , la base $\{\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}(s)\}$ obbedisca alla legge di trasporto di Fermi-Walker ¹:

$$\frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}}{Ds} = \left(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}, \frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(0)}}{Ds} \right) \boldsymbol{\lambda}_{(0)} \quad . \quad (3.1)$$

Per valutare nel giudizio di un osservatore inerziale $\boldsymbol{\omega}$ occorrerà “vedere” la terna $\{\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}(s)\}$ nel sistema \mathcal{I} , cioè si dovranno trasformare i versori $\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}$ tramite una trasformazione pura, cosicché non vengano aggiunte rotazioni.

Il riferimento \mathcal{I} è identificato da un versore temporale $\boldsymbol{e}_{(0)}$, per cui la trasformazione pura tra \mathcal{I} e $\mathcal{F}(s)$ può essere implementata da J_Z con

$$Z(s) = \frac{\boldsymbol{\lambda}_{(0)}(s) + \boldsymbol{e}_{(0)}}{\|\boldsymbol{\lambda}_{(0)}(s) + \boldsymbol{e}_{(0)}\|} \quad .$$

Il Teorema 1.1 sancisce che, nel giudizio di \mathcal{I} , la nuova terna è data, ad ogni istante, dall'insieme $\{\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}(s) := J_Z(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}(s))\}$. Per definizione, $\{\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}\}$ sono una base di $\boldsymbol{e}_{(0)}^\perp$; però, in generale, tali

¹ Questo perché viene richiesto che il corpo sia non ruotante.

versori ruoteranno, rispetto a una base fissa $\{\mathbf{e}_{(\alpha)}\}$ che compete ad \mathcal{I} in quanto riferimento inerziale, e la loro velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ è proprio quella che ci interessa.

Tenendo conto che $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}$ e $\frac{D\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}}{Ds}$ appartengono tutti a $\mathbf{e}_{(0)}^\perp$, con un piccolo abuso di notazione si può scrivere la formula di Poisson

$$\frac{D\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}}{Ds} = \frac{dt}{ds} \frac{D\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}}{Dt} = \frac{\gamma}{c} \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)} \quad , \quad (3.2)$$

intendendo che il simbolo \wedge denoti il prodotto vettoriale nel trispazio $\mathbf{e}_{(0)}^\perp$ e che t sia il tempo nel riferimento \mathcal{I} .

Per risalire ad $\boldsymbol{\omega}$ si può sviluppare la derivata di $\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}$ e confrontare con la (3.2). Dalla definizione (1.11) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}}{Ds} &= \frac{DJ_Z(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)})}{Ds} = \frac{D}{Ds} \left(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)} + 2 (\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}, Z) Z \right) = \\ &= \frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}}{Ds} + 2 \left[\left(\frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}}{Ds}, Z \right) Z + \left(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}, \frac{DZ}{Ds} \right) Z + (\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}, Z) \frac{DZ}{Ds} \right] = \\ &= J_Z \left(\frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}}{Ds} \right) + 2 \left[\left(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}, \frac{DZ}{Ds} \right) Z + (\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}, Z) \frac{DZ}{Ds} \right] \end{aligned}$$

e usando le (3.1), (1.12b), (1.12e) e (1.16a),

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}}{Ds} &= J_Z \left(\frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}}{Ds} \right) + 2 \left[\left(J_Z(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}), J_Z \left(\frac{DZ}{Ds} \right) \right) Z + (J_Z(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}), J_Z(Z)) \frac{DZ}{Ds} \right] = \\ &= \left(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}, \frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(0)}}{Ds} \right) J_Z(\boldsymbol{\lambda}_{(0)}) + 2 \left[\left(\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}, J_Z \left(\frac{DZ}{Ds} \right) \right) Z - (\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}, Z) \frac{DZ}{Ds} \right] = \\ &= - \left(\boldsymbol{\lambda}_{(\alpha)}, \frac{D\boldsymbol{\lambda}_{(0)}}{Ds} \right) \mathbf{e}_{(0)} + 2 \left[\left(\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}, J_Z \left(\frac{DZ}{Ds} \right) \right) Z - (\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}, Z) \frac{DZ}{Ds} \right] . \end{aligned}$$

Inoltre, essendo Z a norma costante, $\frac{DZ}{Ds}$ è ortogonale a Z e quindi $J_Z \left(\frac{DZ}{Ds} \right) = \frac{DZ}{Ds}$.

Ancora, dato che $\frac{D\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}}{Ds} \in \mathbf{e}_{(0)}^\perp$, nel secondo membro della formula precedente tutte le componenti lungo $\mathbf{e}_{(0)}$ si dovranno cancellare; scomponendo $Z = \mathcal{P}_\Theta(Z) \mathbf{e}_{(0)} + \mathcal{P}_\Sigma(Z)$ e anche $\frac{DZ}{Ds} = \mathcal{P}_\Theta \left(\frac{DZ}{Ds} \right) \mathbf{e}_{(0)} + \mathcal{P}_\Sigma \left(\frac{DZ}{Ds} \right)$, e salvando solo le componenti spaziali si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}}{Ds} &= 2 \left[\left(\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}, \frac{DZ}{Ds} \right) \mathcal{P}_\Sigma(Z) - (\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}, Z) \mathcal{P}_\Sigma \left(\frac{DZ}{Ds} \right) \right] = \\ &= 2 \left[\left(\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}, \mathcal{P}_\Sigma \left(\frac{DZ}{Ds} \right) \right) \mathcal{P}_\Sigma(Z) - (\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}, \mathcal{P}_\Sigma(Z)) \mathcal{P}_\Sigma \left(\frac{DZ}{Ds} \right) \right] . \end{aligned}$$

Ricordando la relazione tra vettori spaziali $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{e}_{(0)}^\perp$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{c}, \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{c}, \mathbf{b}) \mathbf{a} \quad ,$$

l'equazione precedente si può riscrivere

$$\frac{D\boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)}}{Ds} = 2 \left[\mathcal{P}_\Sigma \left(\frac{DZ}{Ds} \right) \wedge \mathcal{P}_\Sigma(Z) \right] \wedge \boldsymbol{\lambda}'_{(\alpha)} \quad . \quad (3.3)$$

Per confronto tra le equazioni (3.2) e (3.3) si ricava

$$\boldsymbol{\omega} = 2 \frac{c}{\gamma} \left[\mathcal{P}_\Sigma \left(\frac{DZ}{Ds} \right) \wedge \mathcal{P}_\Sigma(Z) \right] . \quad (3.4)$$

Tale relazione si può riscrivere in una forma più esplicativa: dalla definizione di Z (1.15) si ha

$$\frac{DZ}{Ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{D}{Ds} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma}} \frac{\mathbf{v}}{c} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\gamma)} \left[\sqrt{1+\gamma} \frac{D}{Ds} \left(\gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \right) - \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \frac{d}{ds} \left(\sqrt{1+\gamma} \right) \right] ,$$

$$\mathcal{P}_\Sigma(Z) = \frac{\gamma}{\sqrt{2}(1+\gamma)} \frac{\mathbf{v}}{c} ,$$

$$\frac{D}{Ds} \left(\gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \right) = \frac{d\gamma}{ds} \frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{\gamma}{c} \frac{D\mathbf{v}}{Ds} = \frac{d\gamma}{ds} \frac{\mathbf{v}}{c} + \left(\frac{\gamma}{c} \right)^2 \mathbf{a} ,$$

dove si è introdotto il vettore spaziale $\mathbf{a} := \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{c}{\gamma} \frac{D\mathbf{v}}{Ds}$ allo stesso modo in cui si era introdotto il vettore \mathbf{v} . Quindi \mathbf{v} e \mathbf{a} sono rispettivamente la velocità e l'accelerazione del corpo viste nel sistema \mathcal{I} .

Unendo le cose, si trova

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{1+\gamma} \left[\frac{D}{Ds} \left(\gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \wedge \mathbf{v} \right] = \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)} \mathbf{a} \wedge \mathbf{v} , \quad (3.5a)$$

o, con l'ausilio della (1.22),

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\gamma-1}{v^2} \mathbf{a} \wedge \mathbf{v} . \quad (3.5b)$$

Le equazioni (3.5) rappresentano la velocità angolare della precessione di Thomas.

Sviluppando γ al second'ordine in $\frac{v}{c}$ si ottiene lo sviluppo della (3.5b) all'ordine più basso:

$$\boldsymbol{\omega} \simeq \frac{1}{2c^2} \mathbf{a} \wedge \mathbf{v} . \quad (3.6)$$

3.2 Precessione dello spin

Apparentemente si potrebbe pensare che, almeno in pratica, tutta questa costruzione sia stata inutile: infatti per poter avere effetti relativistici ci vogliono velocità sostenute, e un oggetto macroscopico difficilmente può raggiungerle.

Di contro, per una particella puntiforme non vi è alcun problema ad arrivare a grandi velocità, ma se essa è puntiforme come si fa a parlare di orientazione nello spazio?

In effetti un modo c'è, ed è dato dalla presenza dello *spin* della particella.

Si consideri un elettrone, di carica $-e$, che ruota attorno ad un nucleo *fermo*, effettuando un'orbita circolare. Nel sistema di riferimento del laboratorio, solidale con il nucleo e inerziale, il campo elettrico prodotto dal nucleo è diretto radialmente e, alla distanza del raggio dell'orbita, ha modulo E .

In un tale campo, se l'elettrone si muove a velocità di modulo v (vista nel sistema del laboratorio), ruoterà con la frequenza

$$\omega_0 = \frac{eE}{p} \simeq \frac{eE}{mv} \quad ,$$

dove si è approssimato $\gamma \simeq 1$, per velocità non troppo vicine a c .

Essendo \mathbf{a} ortogonale a \mathbf{v} , e in modulo uguale a $v\omega_0$, dalla (3.6) si vede che la velocità angolare di rotazione del trispazio solidale con l'elettrone, vista dal sistema del laboratorio, assume il valore

$$\omega_T \simeq \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \omega_0 \simeq \frac{1}{2} \frac{v}{c} \frac{e}{mc} E \quad ,$$

dove però tale rotazione è in senso opposto rispetto a quella dell'elettrone attorno al nucleo.

Se non ci fossero momenti agenti sull'elettrone ², visto che solidale al trispazio c'è lo spin dell'elettrone, esso *precederebbe* con velocità angolare ω_T , da cui il nome di precessione di Thomas (per un approfondimento, si veda ad esempio [7]).

Un'applicazione di questo fenomeno si ha, ad esempio, in meccanica quantistica nello studio dell'interazione spin-orbita.

A tale scopo si consideri il sistema appena descritto, ma nel giudizio dell'elettrone che ruota. L'elettrone vede un campo magnetico $\vec{B}_0 \simeq -\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E}$, che accoppiandosi col momento magnetico dell'elettrone genera un momento che fa ruotare lo spin. Ma questo avviene se si considera il sistema solidale con l'elettrone legato ad ogni istante al sistema del laboratorio da trasformazioni pure; però l'elettrone (e quindi il suo spin) in questo sistema ha una rotazione aggiuntiva, dovuta alla precessione di Thomas. Allora in questo sistema l'evoluzione dello spin sarà data da (supponiamo che il fattore giromagnetico dell'elettrone sia esattamente 2)

$$\frac{d\vec{S}}{d\tau} = \frac{e}{mc} \vec{B}_0 \wedge \vec{S} + \vec{\omega}_T \wedge \vec{S} = \vec{\omega}_P \wedge \vec{S} \quad ,$$

² In realtà un momento c'è, e ha l'effetto di aggiungere una rotazione addizionale dello spin. Questo effetto, di accoppiamento spin-orbita, si vede meglio nel sistema solidale con l'elettrone e verrà trattato tra un istante.

dove ω_{P} indica la velocità angolare di precessione totale dello spin (si è fatto uso della formula di Poisson).

Ora, osservando la formula precedente, si capisce che tutto va come se ci fosse solo un campo magnetico efficace \vec{B} di valore

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \frac{mc}{e} \vec{\omega}_{\text{T}} \quad , \quad \vec{\omega}_{\text{P}} = \frac{e}{mc} \vec{B} \quad .$$

Visto che dalle definizioni \vec{B}_0 e $\vec{\omega}_{\text{T}}$ sono antiparalleli, il campo efficace diventa

$$B = B_0 - \frac{mc}{e} \omega_{\text{T}} \simeq \frac{v}{c} E - \frac{1}{2} \frac{v}{c} E \simeq \frac{1}{2} B_0 \quad .$$

Quindi, negli effetti di interazione dello spin con il campo magnetico visto dall'elettrone in moto circolare attorno al nucleo, si dovrà tener conto che l'elettrone "sente" un campo efficace che è la metà di quello effettivamente presente. Questo ragionamento giustifica il fattore $\frac{1}{2}$ che compare nell'Hamiltoniano dell'interazione spin-orbita.

Bibliografia

- [1] S. Pasquero, E. Massa, *Lorentz transformation and reflection operators in Minkowsy space time*, 1991.
- [2] E. Massa, *Appunti di relatività speciale*, 2001, pp. 39-48, 66-70.
- [3] E. Massa, *Elementi di calcolo tensoriale e geometria differenziale*, 2005, pp. 52-55.
- [4] R. Collina, *Appunti di relatività, primo modulo*, 2000, pp. 13-24.
- [5] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Macmillan, New York, 1964, pp. 14-15.
- [6] L. D. Landau, E. M. Lifšits, *Teoria dei Campi*, Editori Riuniti, Mir, 1981, pp.13-42.
- [7] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973, pp. 169-176.