



La fisica della chitarra

Marco Bonvini

8 febbraio 2007

Indice

1 Premessa	2
2 Cosa sono le note	2
2.1 Il sistema temperato	2
3 Le onde stazionarie su una corda	4
3.1 Accordare la chitarra: armonici e battimenti	7
4 Trattamento del segnale: filtri di frequenza	9
4.1 Filtro passa basso	10
4.2 Altri filtri e combinazioni	12
A Appendice matematica	13
A.1 Il suono: onde viaggianti	13
A.2 Serie di Fourier	14
A.3 Impedenze complesse	15

Potete trovare ottime Java Applet sull'argomento al sito <http://www.falstad.com/mathphysics.html>

marco.bonvini@ge.infn.it
<http://www.ge.infn.it/~bonvini>

1 Premessa

Questa breve dispensa è stata pensata come un supporto e un approfondimento riguardo un laboratorio dimostrativo collocato nell'iniziativa OpenWeek 2007, che consiste in una serie di incontri con i ragazzi degli ultimi anni delle scuole superiori svolti nei dipartimenti sedi dei corsi di laurea e atti ad orientare tali studenti nella scelta universitaria. In vari punti questa dispensa richiede un livello di conoscenza maggiore di quello posseduto da uno studente di una quinta di un liceo scientifico: infatti da questo punto di vista questo testo dovrebbe essere inteso come un riferimento da conservare per una lettura futura (chiaramente per chi intraprenderà una carriera scientifica) e per incuriosire e affascinare i futuri fisici vedendo ciò che il corso di laurea in fisica è in grado di offrire, sia a livello di conoscenza strettamente legata agli ambiti di studio ma anche ad aspetti della vita quotidiana.

In ogni caso ho cercato di spiegare in modo più o meno esaustivo tutti i punti chiave della trattazione, anche se per giustificare e spiegare tutto ci vorrebbe molto più tempo (grossomodo l'equivalente dei corsi di analisi e di fisica dei primi due anni del corso di laurea).

Spero comunque che possa interessare e piacere sia al giovane lettore che al lettore più esperto, anche perché l'insieme di tutti gli argomenti trattati a questo livello difficilmente si trova in letteratura.

2 Cosa sono le note

È ben noto che i costituenti primi della musica sono le note. Una persona allenata può riconoscere una nota, sa che essa può esistere sia più grave che più acuta, pur trattandosi sempre della stessa nota. Ma fisicamente di cosa si tratta?

I suoni sono vibrazioni dell'aria, o più in generale del mezzo (solido, liquido o gassoso), in cui si propagano. Nel caso dell'aria (dei fluidi in generale) tali vibrazioni sono solo longitudinali, ovvero corrispondono a compressioni e distensioni ripetute dell'aria. Se tali movimenti hanno un'evoluzione temporale di forma sinusoidale¹ allora per quel suono è definita la sua frequenza, corrispondente alla frequenza della vibrazione.

Le note altro non sono che i suoni corrispondenti a ben determinate frequenze "piacevoli" all'orecchio umano. Quindi di fatto nel seguito nota e frequenza del suono saranno considerati pressoché sinonimi.

A livello notazionale, invece che i classici nomi che vengono dati alle note, conviene numerarle (a partire da un punto a piacere) convenendo che ad ogni incremento unitario corrisponda l'avanzamento di un *semitono*; la frequenza associata alla nota sarà indicata con

$$f_n$$

dove n è il numero corrispondente alla nota.

2.1 Il sistema temperato

Un tempo le note erano state "costruite" in modo tale che le rispettive frequenze avessero dei rapporti ben precisi tra loro: si ottenne così il *sistema naturale*.

¹Se, ad esempio, la forma fosse triangolare, si potrebbe lo stesso parlare di una frequenza e di un *timbro*; tuttavia una forma d'onda periodica può sempre essere pensata come somma (infinita) di onde sinusoidali di frequenze multiple della frequenza più bassa (detta fondamentale): tale è il contenuto del teorema di Fourier.

Successivamente, sia per difficoltà legate all'accordatura di strumenti musicali come la chitarra sia per rendere più razionale e universale il sistema, si creò il cosiddetto *sistema temperato*. Esso si basa sul seguente postulato: il rapporto tra la frequenza di una nota n e di una nota $n + p$ è funzione unicamente di p . (Detto in altre parole, se suonate una canzone in una determinata scala e poi decidete di farla uguale ma aumentando tutte le note di tre semitoni, la canzone rimane la stessa, sebbene un po' più acuta.) In formule si ha

$$\frac{f_{n+p}}{f_n} = g(p)$$

dove $g(p)$ è una funzione discreta di p .

Una cosa da notare è che il doppio (o il quadruplo...²) della frequenza di una nota vengono considerati la stessa nota: questo perché proprio a livello di onda i suoni si accoppiano bene, senza creare fenomeni di battimenti, e ciò viene percepito dall'orecchio come un suono analogo. Detto ciò, stabilito ancora ad arbitrio che in un'ottava (ovvero tra una frequenza e il suo doppio) ci sono 12 note (o meglio, ci sono 12 semitoni tra una nota e l'altra), possiamo trovare tutti i rapporti tra le note della scala temperata, ovvero i valori di $g(p)$.

Infatti abbiamo deciso che

$$\frac{f_{n+12}}{f_n} = 2$$

e d'altro canto possiamo scrivere

$$\frac{f_{n+12}}{f_n} = \frac{f_{n+12}}{f_{n+11}} \frac{f_{n+11}}{f_{n+10}} \dots \frac{f_{n+1}}{f_n} = g(1) g(1) \dots g(1) = g(1)^{12}$$

da cui, confrontando con l'equazione precedente,

$$g(1) = \sqrt[12]{2}$$

A questo punto possiamo trovare con facilità $g(p)$; infatti procedendo come prima

$$g(p) = \frac{f_{n+p}}{f_n} = \frac{f_{n+p}}{f_{n+p-1}} \dots \frac{f_{n+1}}{f_n} = g(1)^p = \left(\sqrt[12]{2} \right)^p$$

Avendo a disposizione i rapporti tra le note, resta da scegliere una nota di partenza e fissarne la frequenza: la scelta canonica è quella di fissare la frequenza del *LA centrale* (che noi potremmo far corrispondere a $n = 0$) al valore

$$f_0 = 440 \text{ Hz}$$

dopodiché le frequenze di tutte le altre note sono determinate dalla conoscenza di $g(p)$!

Giusto a titolo di esempio, il DO immediatamente precedente al LA centrale dista 9 semitoni dal LA stesso; allora (indicando il DO con $n = -9$) si ha che

$$f_{-9} = \left(\sqrt[12]{2} \right)^{-9} f_0 = 261,6 \text{ Hz} .$$

²In generale $2^k f_n$ con k intero.

3 Le onde stazionarie su una corda

Stabiliamo ora cosa succede quando una corda viene pizzicata (o “plettrata”, se preferite).

Tanto per cominciare, come in ogni sistema fisico, ci sarà un’equazione (differenziale) che descrive il sistema (la corda); è chiaro però che ogni volta che si “fa partire” il sistema (ovvero ogni volta che pizzichiamo la corda) il sistema evolverà in modo diverso. Questo semplicemente perché la soluzione dell’equazione, che è universale, dipenderà sempre da alcuni parametri, detti *le condizioni al contorno*, che invece di volta in volta dipendono da come viene pizzicata la corda.³

Allora, per cominciare, cerchiamo di trovare l’equazione che descrive le oscillazioni della corda. Consideriamo la corda, di lunghezza ℓ e massa m , stesa lungo un asse, diciamo l’asse x ; supponiamo che la corda sia vincolata agli estremi (tale è in una chitarra). Supponiamo che tale corda, a causa di un colpo di plettro, venga leggermente spostata in un punto dalla sua posizione distesa di equilibrio; per semplificare le idee supponiamo che tutto il movimento che sarà dovuto allo spostamento avvenga in un piano, contenente sicuramente l’asse x , e si chiami quindi l’altro asse appartenente al piano e ortogonale al primo asse y .

Trattandosi di fisica classica, l’equazione che andiamo cercando dovrà essere l’equazione di Newton, la stranota $F = ma$. Visto che l’accelerazione a è determinata conoscendo la forza, a noi adesso serve capire quali siano le forze in gioco.

Immaginiamo di suddividere la corda per tutta la sua lunghezza in tanti piccoli segmentini (al limite infiniti), di lunghezza $\delta\ell$; se la densità della corda è uniforme, è possibile definire una densità lineare $\rho = \frac{m}{\ell}$, e quindi la massa del singolo segmentino è $\delta m = \rho\delta\ell$.

Essendo la posizione della corda di poco spostata da quella di equilibrio, è naturale supporre che la tensione⁴ T rimanga pressoché costante, e visto che a riposo essa è pure uniforme, allora tale rimarrà.

Fissandoci su uno dei segmentini (Figura 1), i cui estremi abbiano proiezioni sull’asse x nei punti x e $x + \delta x$, esso sarà tirato con una forza pari alla tensione T ai due estremi, ma tali tensioni a priori saranno in direzioni leggermente diverse, formanti rispettivamente angoli $\alpha(x)$ e $\alpha(x + \delta x)$ con l’asse x . L’ipotesi fatta di piccoli scostamenti dalla posizione di equi-

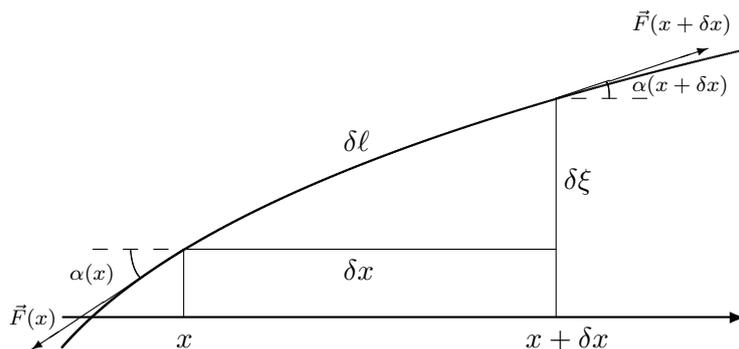


Figura 1: Dettaglio della corda

³Questo processo è perfettamente inquadrato nella teoria matematica delle equazioni differenziali ordinarie: data un’equazione differenziale contenente derivate fino all’ordine n e con essa n condizioni al contorno, essa avrà un’unica soluzione (in letteratura questa affermazione si chiama *problema di Cauchy*). Più complicata è invece la teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali, una cui parte è inquadrata nell’ambito dell’analisi di Fourier; è pur sempre possibile trovare un’unica soluzione, a patto però di fornire *infinite* condizioni al contorno.

⁴La tensione è definita come quella forza che dovrebbe essere applicata, se la corda venisse tagliata, in ciascuno dei due punti in cui si è eseguito il taglio, affinché essi rimangano uniti.

brio si configura qui come piccoli valori di α . La proiezione della forza lungo x allora darebbe $T \cos(\alpha(x + \delta x)) - T \cos(\alpha(x))$, ma per α piccoli il coseno vale circa 1 e quindi praticamente non c'è forza lungo x .⁵

Lungo y invece una componente della forza c'è, ed è data da

$$\begin{aligned} \delta F_y(x) &= T \sin(\alpha(x + \delta x)) - T \sin(\alpha(x)) \simeq \\ &\simeq T [\tan(\alpha(x + \delta x)) - \tan(\alpha(x))] = \\ &= T \frac{\tan(\alpha(x + \delta x)) - \tan(\alpha(x))}{\delta x} \delta x \simeq \\ &\simeq T \frac{\partial \tan(\alpha)}{\partial x} \delta x \end{aligned}$$

Ora, la seconda legge della dinamica scritta per il segmentino diventa $\delta F_y(x) = \rho a \delta \ell$ e, tenendo conto dell'equazione precedente e che $\delta \ell \simeq \delta x$, si trova

$$T \frac{\partial \tan(\alpha)}{\partial x} = \rho a .$$

A questo punto possiamo renderci conto che ricavare la vibrazione della corda significa conoscere ad ogni istante quanto vale lo scostamento (lungo y) dalla posizione di equilibrio. Chiamiamo tale scostamento $\xi(x, t)$, dove è stata messa in evidenza la dipendenza sia dalla posizione lungo la corda sia la dipendenza dal tempo. Scopo dell'esercizio è quindi trovare la forma funzionale di tale grandezza.

Convenendo di indicare $\delta \xi(x, t) = \xi(x + \delta x, t) - \xi(x, t)$, si vede subito che

$$\delta \xi(x, t) \simeq \tan(\alpha(x)) \delta x .$$

Allora passando al limite per $\delta x \rightarrow 0$, si ottiene $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \tan(\alpha)$. Inoltre l'accelerazione a altro non è che la derivata seconda di ξ rispetto al tempo, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$. Unendo le cose si giunge finalmente all'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (1)$$

Si può dimostrare (si veda l'Appendice A.1) che la velocità di propagazione delle onde (velocità del suono) è data da

$$v_s = \sqrt{\frac{T}{\rho}} . \quad (2)$$

In generale, quindi, l'equazione

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (3)$$

rappresenta l'equazione delle onde propagantisi con velocità v ; per dirne una, le onde elettromagnetiche sono descritte dalla stessa equazione, con $v = c$ (velocità della luce) e $\xi = E$ (campo elettrico).

A questo punto possiamo trovare una soluzione dell'equazione (1). Per prima cosa osserviamo che, come già anticipato, l'equazione descrive ogni possibile propagazione ondosa, sia che la corda sia a estremi fissi, mobili, uno fisso e l'altro mobile, infinita, ecc. La scelta di considerare la

⁵In realtà, se anche qualcosa ci fosse, in breve tempo il sistema si configurerebbe in modo tale che non vi sia una tale componente della forza, cambiando leggermente la tensione tra un estremo e l'altro; ma visto che tra le nostre ipotesi c'è quella di considerare la tensione uniforme trascuriamo questo effetto.

corda ad estremi fissi ci dà un vincolo sulle soluzioni.

L'approccio che seguiremo è quello di spezzare la dipendenza temporale e quella spaziale nella soluzione, in un certo senso provando a mettere delle soluzioni di prova. La prima scelta, elementare, è quella di provare una soluzione del tipo

$$\eta(t) \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

(λ è la lunghezza d'onda); sostituendola nell'equazione la derivata spaziale agisce due volte sul seno producendo un altro seno, per cui di fatto esso può essere eliminato cancellando la dipendenza spaziale dall'equazione originale e lasciando una nuova equazione per $\eta(t)$:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\left(\frac{2\pi v_s}{\lambda}\right)^2 \eta.$$

Ancora, per "tentativi", proviamo una soluzione $\eta(t) = A \cos(2\pi ft + \phi)$, dove f è la frequenza dell'onda, A e ϕ due numeri reali. Per sostituzione si vede subito che l'equazione è soddisfatta se

$$f = \frac{v_s}{\lambda} \quad (4)$$

che è la ben nota relazione tra i parametri di un'onda (non abbiamo scoperto molto...). Ora osserviamo una cosa. La scelta di avere estremi fissi⁶ si configura nelle condizioni

$$\xi(0, t) = \xi(\ell, t) = 0 \quad \forall t.$$

La prima condizione è automaticamente soddisfatta, perché $\sin(0) = 0$, mentre la seconda implica $\sin\left(\frac{2\pi\ell}{\lambda}\right) = 0$, che è soddisfatta se $\frac{2\pi\ell}{\lambda} = q\pi$, con $q = 1, 2, 3, \dots$, ovvero

$$\lambda = \frac{2\ell}{q} \quad q = 1, 2, 3, \dots;$$

questo ci dice esattamente quello che potevamo intuire pensando all'onda: affinché gli estremi rimangano fissi possiamo subito dire che la lunghezza della corda deve essere un multiplo intero di mezze lunghezze d'onda.

Tuttavia questo ci dice una cosa molto importante: non tutte le frequenze sono possibili. Infatti, richiamando la (4), vediamo che

$$f = q \frac{v_s}{2\ell} \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Per $q = 0$ si ha la frequenza minima, che è detta la *frequenza fondamentale*; le altre frequenze, multiple della fondamentale, sono dette *armoniche*.

Giunti a questo punto siamo in grado di scrivere la soluzione completa dell'equazione (1). Dal momento che essa è lineare, la somma di soluzioni è ancora una soluzione; e qui noi abbiamo trovato infinite soluzioni, una per ogni valore di q e a sua volta dipendente da parametri A e ϕ . Mettendo insieme le cose, possiamo unire tutte queste soluzioni in un'unica sommatoria (infinita):

$$\xi(x, t) = \sum_{q=1}^{\infty} A_q \cos\left(\frac{q\pi v_s}{\ell} t + \phi_q\right) \sin\left(\frac{q\pi}{\ell} x\right) \quad (6)$$

⁶Che è il motivo per cui si è scelto questo particolare tipo di soluzione.

che, come si vede, dipende da una duplice infinità di parametri reali, A_q e ϕ_q , che sono da determinarsi dalle condizioni iniziali, ovvero da come viene pizzicata la corda⁷.

È interessante notare che, come si vede bene dalla soluzione (6), quando si suona una corda essa non produce solo una frequenza, ma una serie di frequenze multiple della fondamentale⁸. A meno di non forzare la corda a produrre solo certe frequenze, per una sollecitazione abbastanza normale le frequenze che dominano sono quelle con q più piccolo, e in particolare quella fondamentale. Per cui ha senso parlare di frequenza (e di nota) associata ad una corda, intendendo di riferirsi alla frequenza fondamentale. Ancora, tenendo conto di ciò, si può osservare che, dall'unione di (5) e (2), si ha che la frequenza fondamentale è data da

$$f = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

che stabilisce il legame tra la frequenza emessa dalla corda e le caratteristiche della corda (lunghezza, tensione, densità)! Questo dovrebbe essere illuminante sul perché le corde della chitarra hanno spessore diverso, sul perché vengono tese e sul perché nella chitarra sono presenti i tasti: le tre cose servono proprio per agire sulle tre grandezze succitate e modificare quindi la frequenza del suono.

Non solo, ma unendo questi dati all'informazione ottenuta al § 2.1 sulla funzione $g(p)$, si capisce bene perché i tasti della chitarra sono distanziati in modo così particolare: i rapporti tra le loro lunghezze sono dati proprio da $g(p)$ (verificare per esercizio⁹).

3.1 Accordare la chitarra: armonici e battimenti

Vediamo ora un interessante sviluppo dei risultati appena ottenuti: l'accordatura della chitarra. Nei libri di musica di solito viene spiegato semplicemente quali note devono emettere le singole corde a vuoto e di conseguenza a quale tasto deve essere bloccata una corda per far emettere la stessa nota della precedente: questo tasto è sempre il quinto, tranne che per la coppia seconda e terza corda, in cui il tasto è il quarto¹⁰.

Tuttavia, per un principiante, non è facile capire se due corde stanno emettendo esattamente la stessa nota, se non altro perché essendo le corde diverse esse avranno un timbro un po' diverso (dovrebbe esser chiaro il perché: oltre alla frequenza fondamentale pizzicando la corda vengono emesse tutta una serie di armoniche superiori, come si vede in (6), che però hanno ampiezze A_q diverse a seconda di come viene pizzicata). Il modo migliore per poter apprezzare il minor numero di armoniche è quello di vincolare un qualche punto (non casuale) della corda a non oscillare, ovvero creare un *nodo*: in musica ci si riferisce a questa tecnica parlando di *armonici* (l'etimologia del nome è chiara dopo questa spiegazione).

Il modo più semplice per vincolare la corda è metterci un dito sopra. Tuttavia tutti sanno che molto probabilmente se tocco la corda in un punto qualsiasi essa fa un rumorino ovattato e acuto alla plettrata, ma niente di più. Per capire come conviene agire, analizziamo il grafico in Figura 2 dove sono visualizzate le prime 4 armoniche.

Si vede che l'armonica fondamentale, indicata con 1 (che corrisponde al valore dell'indice q), non ha nodi (punti in cui interseca il segmento nero, ovvero la posizione di riposo della corda),

⁷Si pensi ad esempio al fatto che pizzicando la corda la centro il suono è più morbido, mentre pizzicando vicino al ponte il suono diventa più metallico: questo è proprio l'effetto di avere condizioni iniziali differenti.

⁸Si osservi che tra i multipli non vi è sempre solo la stessa nota, che invece è ottenuta solo quando q è una potenza di 2; non solo, ma a certe frequenze non corrisponde alcuna nota.

⁹Suggerimento: verificare preliminarmente per due tasti adiacenti, per capire il procedimento, poi estendere.

¹⁰Usiamo la convenzione comune in cui la prima corda è quella più sottile (acuta).

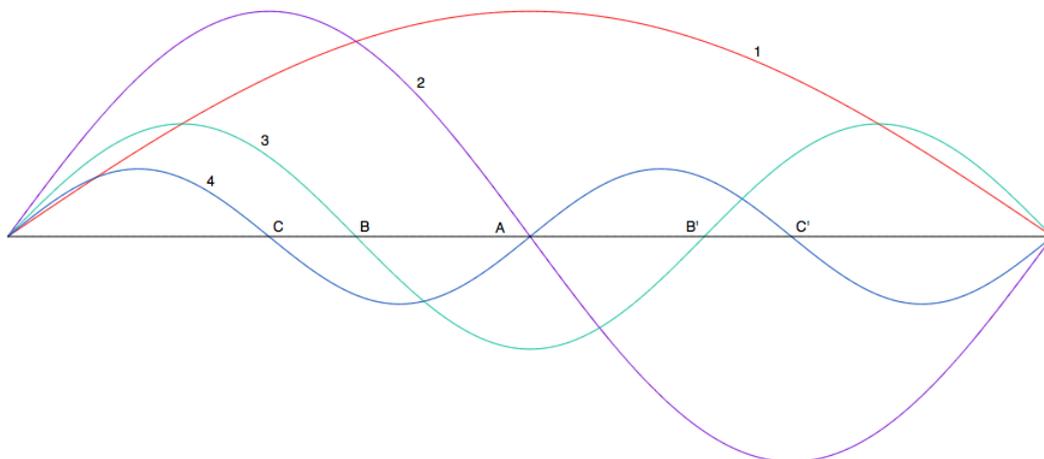


Figura 2: Le prime 4 armoniche di una corda pizzicata.

la seconda armonica, indicata con 2, ne ha uno (punto A), la terza due (punti B e B')... la q -esima ha $q - 1$ nodi.

Se immaginiamo di mettere un dito sulla corda a metà della sua lunghezza, cioè nel punto A, e di pizzicarla in un altro punto, la corda vibrerà col vincolo che quel punto rimanga fisso, ovvero tra le frequenze possibili ci saranno solo quelle che hanno un nodo in A: queste frequenze sono tutte e sole le frequenze con q pari, per cui in tal modo riusciamo a eliminare dalla vibrazione tutte le frequenze con q dispari, compresa la fondamentale!

Non solo, ma visto che più q aumenta più l'onda si infittisce, e visto che il nostro dito ha un certo spessore, taglieremo anche tutte quelle armoniche che hanno lunghezza d'onda confrontabile o inferiore alla dimensione del nostro dito. In sostanza, stiamo ottenendo un suono molto più *puro*, e quindi di facile riconoscimento da parte dell'orecchio umano. Non solo, ma in tale suono praticamente domina la prima frequenza accessibile, quindi per i conti successivi possiamo ipotizzare che sia presente solo quell'armonica.

Vediamo ora che la condizione di accordatura della chitarra (per tutte le coppie di corde eccetto che per la seconda e terza) equivale all'emissione della stessa frequenza della terza armonica di una corda e la quarta armonica della successiva. In sostanza, per accordare la prima corda con la seconda, metterò un dito nel punto B della prima e un dito nel punto C della seconda. Quindi, se la seconda corda ha frequenza fondamentale f_0 , il suo quarto armonico avrà frequenza $4f_0$; la corda precedente, se accordata, deve avere frequenza fondamentale $g(5)f_0 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^5 f_0$, e quindi il suo terzo armonico deve avere frequenza $3\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 f_0 = 4.0045f_0$. L'accordo, di fatto, non è perfetto, quindi significa che accordando in questa maniera sgarriamo un pochino; tuttavia esso è decisamente buono e la leggerissima scordatura è abbastanza impercettibile all'orecchio umano¹¹.

A questo punto osserviamo come al nostro orecchio si manifesta una piccola differenza tra due armonici, ovvero come facciamo a capire che le due corde non sono perfettamente accordate.

¹¹È interessante notare che accordare in questa maniera riproduce esattamente la scala *naturale*; tuttavia i tasti sul manico della chitarra sono distanziati in maniera temperata, il che non può permettere un "ritorno" alla scala naturale, nonostante questa bella proprietà.

Il fenomeno che stiamo per scoprire è noto col nome di *battimenti*, e il significato sarà chiaro a breve.

Per capirlo, supponiamo che l'armonico su una delle corde produca la frequenza giusta, corrispondente alla pulsazione ω : la vibrazione, nel tempo, sarà quindi del tipo $\sin(\omega t)$ per una qualche ampiezza. Supponiamo adesso che il corretto armonico sulla corda successiva, che è scordata, emetta invece una pulsazione di poco diversa, diciamo $\omega + \epsilon$: allora essa vibrerà con un andamento $\sin(\omega t + \epsilon t)$, con una qualche ampiezza.

Se suoniamo gli armonici insieme, e immaginiamo che essi abbiano la stessa ampiezza (con un po' di sforzo possiamo metterci in condizioni circa tali), il suono complessivo sarà la somma dei due, che, usando le ben note¹² formule di prostaferesi, possiamo riscrivere come

$$\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \epsilon t) = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\epsilon}{2}t\right) \cos\left(\frac{\epsilon}{2}t\right).$$

Appare chiaro che se $\epsilon \ll \omega$ praticamente il primo coseno dà l'oscillazione complessiva, mentre il secondo lo modula, ossia ne fa variare il volume periodicamente, come si vede bene nella Figura 3.

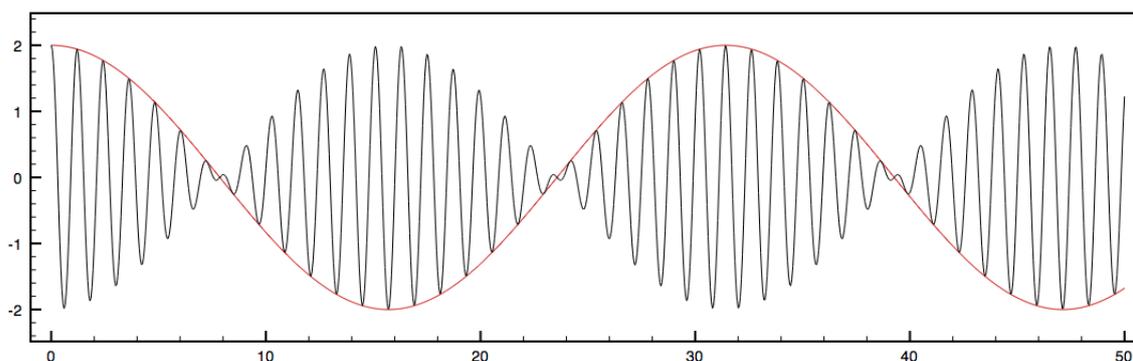


Figura 3: Battimenti; $\omega = 5$ e $\epsilon = 0.4$, in rosso la modulante $2 \cos(0.2t)$.

Allora per accordare le corde basterà sentire che questa modulazione di volume diventi sempre più rarefatta, fino a sparire lasciando solo il suono dell'armonico.

4 Trattamento del segnale: filtri di frequenza

Tutti sentiamo spesso parlare e parliamo di equalizzazioni, toni alti, bassi, a volte dei suoni si danno descrizioni come pieno, distorto, ecc. È altresì ben noto che il suono può essere modificato, ad esempio con l'uso di un qualunque software musicale, tramite vari effetti. Ma di fatto che cosa si sta facendo?

La risposta è una ed è semplice: si sta giocando con le frequenze.

Volendo essere un po' più precisi, dato che un suono è sempre pensabile come una sovrapposizione di onde sinusoidali (si veda l'Appendice A.2) di frequenza diversa (ciascuna con la sua ampiezza), allora possiamo modificare le caratteristiche di un suono "semplicemente" andando a modificare le ampiezze di certe frequenze.

Ad esempio, volendo enfatizzare i bassi, possiamo moltiplicare per 1.3 le ampiezze (ovvero i

¹²Per la loro inutilità!

volumi) delle frequenze al di sotto di 250 Hz (oppure moltiplicare per 0.8 quelle al di sopra e alzare il volume delle casse...); oppure possiamo modulare l'ampiezza di tutte le frequenze, ovvero farla aumentare e diminuire ripetutamente e ottenere un effetto tipo "wah". Le possibilità sono tantissime, e alcune richiedono però uno studio dell'evoluzione temporale del suono, il che le rende un po' più complicate. Per questo testo ci limiteremo a parlare di come funziona un equalizzatore.

Assumendo un punto di vista pratico, immaginiamo di aver trasportato il suono su di un cavo elettrico, ad esempio con un microfono o con un pick-up (chitarra o basso elettrici): il suono come onda di pressione si è così convertito in un segnale elettrico. Se questa conversione fosse perfetta a questo punto avremmo che la variazione di pressione dell'aria corrispondente al suono sarebbe identica alla variazione di tensione trasmessa nel cavo.

A questo punto, rifacendoci sempre al principio di sovrapposizione già citato e spiegato in Appendice A.2, tale segnale, che indichiamo con $V(t)$, può essere scomposto in una somma di armoniche $V_\omega(t)$, ciascuna con la sua frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$; in formule

$$V(t) = \sum_{\omega=0}^{\infty} V_\omega(t) \quad , \quad V_\omega(t) = V_\omega \cos(\omega t - \psi_\omega) .$$

La somma tecnicamente andrebbe fatta su valori discreti di ω ; se, come supponiamo noi, tutte le frequenze sono possibili (diversamente da quello che accade per la corda della chitarra) allora bisognerebbe passare al continuo e rendere la sommatoria un integrale in $d\omega$; così facendo $V_\omega(t)$ assume un significato diverso (ha anche dimensioni diverse), in quanto diventa una *densità*, e non si parla più di serie di Fourier ma di *trasformata di Fourier*. La teoria a riguardo è molto bella, ma difficile da trattare, specie a questo livello. Noi continueremo a lavorare nel caso discreto, senza per ciò ledere di generalità: di fatto i calcoli nel caso continuo sono più complicati matematicamente, ma il contenuto fisico è ben chiaro se si lavora nel caso discreto.¹³ Ciò posto, mettiamoci nelle condizioni in cui gli apparati elettronici con cui interagiamo siano di un certo tipo, detto LTI¹⁴; allora, per tali sistemi, siamo certi che sapendo cosa succede ad una singola armonica $V_\omega(t)$ possiamo sapere cosa succede all'intero segnale $V(t)$, ovvero se nell'interazione con l'elettronica le $V_\omega(t)$ si trasformano in $V'_\omega(t)$ allora il segnale complessivo $V(t)$ si trasforma in

$$V'(t) = \sum_{\omega=0}^{\infty} V'_\omega(t) .$$

Questa proprietà è proprio quella che volevamo, come annunciato a inizio paragrafo: per ogni frequenza siamo in grado di modificare le rispettive ampiezze V_ω . Cioè, lo siamo se riusciamo a costruire circuiti che trattino come vogliamo noi ciascuna armonica.

4.1 Filtro passa basso

Per far questo cominciamo a studiare un circuito molto semplice, come quello illustrato in Figura 4.

Per prima cosa osserviamo che se ci mettiamo nella condizione in cui, fissata la pulsazione ω con cui vogliamo lavorare, si pone $\psi_\omega = 0$, non si perde generalità, perché tale scelta altro non

¹³In ogni caso è sempre buona prassi studiare un problema nella forma più semplice, e solo successivamente generalizzarlo; è vero che partire dalla situazione più generale è più *bello*, ma non è il miglior metodo di apprendimento.

¹⁴Linear Time Invariant; senza entrare nel dettaglio, basti sapere che resistori, condensatori e buona parte dei componenti elettronici di uso comune sono di questo tipo, entro certi limiti di temperature, tensioni e correnti.

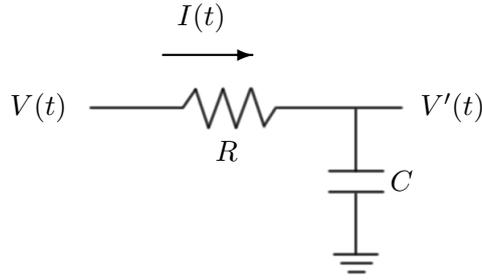


Figura 4: Filtro passa basso

è che una ridefinizione dell'istante iniziale $t = 0$, ottenuto dal passaggio $t \rightarrow t - \frac{\psi_\omega}{\omega}$. Perciò immaginiamo che al resistore arrivi la tensione

$$V_\omega(t) = V_\omega \cos(\omega t) ;$$

la caduta di tensione sul resistore è $I(t)R$ e quella sul condensatore è $\frac{Q(t)}{C}$, dove R e C sono rispettivamente la resistenza e la capacità di resistore e condensatore e la corrente $I(t)$ e la carica $Q(t)$ sono legate da $I(t) = \frac{dQ}{dt}$. Usando la seconda legge di Kirchhoff possiamo scrivere

$$V_\omega(t) - RI(t) - \frac{1}{C}Q(t) = 0 ,$$

ovvero, usando il legame tra carica e corrente,

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{\tau}Q(t) = \frac{V_\omega}{R} \cos(\omega t) \quad , \quad \tau = RC . \quad (7)$$

Per risolvere l'equazione, supponiamo, come è ragionevole che sia, che la soluzione sia anch'essa di tipo sinusoidale, al limite con uno sfasamento. Anzi, supponiamo che la corrente sia data da

$$I(t) = I_\omega \cos(\omega t - \phi_\omega) ,$$

il che corrisponde ad una carica

$$Q(t) = \frac{I_\omega}{\omega} \sin(\omega t - \phi_\omega) .$$

Sostituendo nell'equazione (7) si trova

$$I_\omega \cos(\omega t - \phi_\omega) + \frac{I_\omega}{\omega\tau} \sin(\omega t - \phi_\omega) = \frac{V_\omega}{R} \cos(\omega t)$$

e, usando le formule di somma e differenza di seni e coseni, e riordinando, si trova

$$I_\omega \sin(\omega t) \left[\sin(\phi_\omega) + \frac{1}{\omega\tau} \cos(\phi_\omega) \right] + \cos(\omega t) \left[I_\omega \cos(\phi_\omega) - \frac{I_\omega}{\omega\tau} \sin(\phi_\omega) - \frac{V_\omega}{R} \right] = 0 ;$$

l'annullarsi dell'espressione precedente ad ogni istante t è soddisfatta se si annullano indipendentemente i pezzi tra le parentesi quadre; il primo porta all'informazione sullo sfasamento

$$\tan(\phi_\omega) = -\frac{1}{\omega\tau}$$

e il secondo, con qualche passaggio, permette di ottenere il valore dell'ampiezza della corrente:

$$I_\omega = \frac{V_\omega}{R} \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}.$$

Con ciò abbiamo “risolto” il circuito. Per costruire il filtro che volevamo dobbiamo semplicemente scegliere in che punto estrarre il segnale. In questo circuito l'unico punto non banale è tra resistore e condensatore. Indichiamo con $V'_\omega(t)$ la tensione in questo punto: la sua ampiezza sarà data da

$$V'_\omega = \frac{Q}{C} = \frac{I_\omega}{\omega C} = \frac{V_\omega}{\omega RC} \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}},$$

ovvero, infine,

$$V'_\omega = V_\omega \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad (8)$$

(la frazione che moltiplica V_ω si chiama *funzione di trasferimento*; questo risultato si può ottenere molto più semplicemente facendo uso delle impedenze complesse: si veda l'Appendice A.3). Si vede chiaramente, a questo punto, che per pulsazioni $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ si ha semplicemente $V'_\omega \simeq V_\omega$, mentre per $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ invece $V'_\omega \simeq \frac{V_\omega}{\omega\tau}$, ovvero la tensione in uscita diminuisce proporzionalmente al crescere di ω .

In questo modo abbiamo costruito quello che si chiama un filtro *passa basso* (o taglia alto), con frequenza di taglio $\frac{1}{2\pi\tau}$: il significato del nome è implicito nel suo funzionamento, ovvero quello di lasciar passare sostanzialmente invariate le armoniche al di sotto della frequenza di taglio e di sopprimere progressivamente quelle al di sopra.

Un'osservazione da fare, su cui finora abbiamo acutamente taciuto, è che anche lo sfasamento dipende dalla frequenza. Questo in un contesto in cui sia presente nel segnale d'ingresso una sola armonica è sostanzialmente trascurabile, perché si ripercuote unicamente in uno sfasamento temporale. Nel caso in cui, invece, il segnale d'ingresso è più complesso, composto da varie armoniche con ben precise fasi relative, il segnale d'uscita deve essere ricomposto non solo con le nuove ampiezze, ma anche con le nuove fasi, e questo può modificarne drasticamente l'entità. Non è il caso di addentrarci in una discussione di questo tipo.

4.2 Altri filtri e combinazioni

Giusto per completezza, riportiamo il risultato per un filtro analogo al precedente, ma con condensatore e resistore invertiti di posto. Tale filtro è detto *passa alto* e per esso la relazione è data da

$$V'_\omega = V_\omega \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad (9)$$

dove la frequenza di taglio è sempre $\frac{1}{2\pi\tau}$ ma stavolta vengono soppresse le frequenze inferiori a tale frequenza.

Anche se a prima vista le due formule (8) e (9) sembrano poco simmetriche, esse in scala logaritmica¹⁵ danno luogo a grafici esattamente simmetrici, rispetto alla frequenza di taglio.

Un'altra cosa molto interessante da notare è che mettendo filtri in cascata si possono ottenere filtraggi differenti. Il risultato finale altro non è che il prodotto delle funzioni di trasferimento di ciascun filtro (in pratica è come se il segnale dovesse “fluire” attraverso delle finestre ciascuna delle quali fa passare certe frequenze e ne taglia altre); con i due filtri precedenti, giocando coi

¹⁵E questo è il modo giusto di guardarli. La dimostrazione di questo fatto è molto interessante, ma un po' lunga. Si rimanda ad una mia futura pubblicazione al riguardo.

valori di resistenze e capacità, si può costruire un filtro passa banda. In sostanza con un po' di filtri possiamo fare un equalizzatore!¹⁶

A Appendice matematica

A.1 Il suono: onde viaggianti

Nel § 3 si è trovata la soluzione dell'equazione (3) e si è detto, senza dimostrare, che v è la velocità dell'onda. Vediamo più nel dettaglio che succede.

Per prima cosa occorre dire che quasi sempre le onde sono descritte da un'equazione di questo tipo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \xi = 0 \quad (10)$$

dove di volta in volta v assumerà valori diversi, dipendenti dalle caratteristiche del mezzo. Per trovare la soluzione generale introduciamo le variabili

$$u_- = x - vt \quad , \quad u_+ = x + vt$$

e osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u_+}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_+} + \frac{\partial u_-}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_-} = \frac{\partial}{\partial u_+} + \frac{\partial}{\partial u_-} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial u_+}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u_+} + \frac{\partial u_-}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u_-} = v \left(\frac{\partial}{\partial u_+} - \frac{\partial}{\partial u_-} \right) , \end{aligned}$$

da cui

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial u_+} + \frac{\partial}{\partial u_-} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial u_+} - \frac{\partial}{\partial u_-} \right)^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial u_- \partial u_+} .$$

Quindi la (10) si riscrive

$$\frac{\partial^2}{\partial u_- \partial u_+} \xi = 0 \quad (11)$$

la cui soluzione generale è

$$\xi = \xi_-(x - vt) + \xi_+(x + vt) , \quad (12)$$

dove le parti ξ_- e ξ_+ rappresentano rispettivamente un'onda *progressiva* e una *regressiva*. Questi nomi derivano dal fatto che il profilo dell'onda, ovvero la forma della funzione che si ottiene guardando lungo tutto l'asse x la funzione ad un certo istante, mettiamo $t = 0$, si muove rigidamente negli istanti successivi. Cioè, nel caso dell'onda progressiva ξ_- , prendiamo il valore dell'onda, a $t = 0$, in un punto corrispondente a $x - vt = a \Rightarrow x(t = 0) = a$ (che vale quindi $\xi_-(a)$); per ogni valore di a vedo tutta l'onda. Adesso, dopo un tempo t , lo stesso punto a corrisponderà a $x(t) = a + vt$, e quindi si capisce che l'onda si sta spostando nel verso delle x positive con velocità v .

A questo punto non abbiamo ancora idea di come siano fatte le soluzioni ξ_- e ξ_+ ; tuttavia notiamo subito che soluzioni del tipo $\cos(kx - kv t)$ o $\cos(kx + kv t)$ sono soluzioni dell'equazione (10), e anche le rispettive coi seni (che di fatto sono coseni sfasati). Quindi l'idea è che la più generale soluzione si possa scrivere come sovrapposizioni di seni e coseni, con diversi valori di

¹⁶Se volessimo amplificare certe ampiezze, oltre che tagliarne altre, dovremmo usare dei componenti elettronici *attivi*, come i cosiddetti *amplificatori operazionali*, dei circuiti integrati a base di transistor.

k . Questa idea sarà formalizzata nel prossimo paragrafo.

A questo punto potrebbe sembrare che la soluzione della corda pizzicata (6) non sia del tipo (12). Invece è proprio così. Fissato un valore di k a $\frac{q\pi}{\ell}$, si ha che

$$\cos(kvt) \sin(kx) = \frac{1}{2} [\sin(kx - kvt) + \sin(kx + kvt)] ,$$

ovvero è la sovrapposizione di un'onda progressiva e di una regressiva con la stessa ampiezza (è chiaro che l'onda stazionaria è un caso più ristretto della soluzione generale, perché ha dei vincoli).

A.2 Serie di Fourier

Supponiamo di avere una funzione f periodica in y , con periodo $\frac{2\pi}{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora il *teorema di Fourier*, che non dimostriamo, ci garantisce che possiamo scrivere

$$f(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\alpha y} \quad , \quad c_n \in \mathbb{C} .$$

Partendo da questa, vediamo ora cosa succede se la funzione che vogliamo scomporre in serie è reale, cosa che succede se essa rappresenta una grandezza fisica. In tal caso si ha che $f(y) = \bar{f}(y)$ e, dall'equazione precedente,

$$\bar{f}(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{c}_n e^{-in\alpha y} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{c}_{-n} e^{in\alpha y} ,$$

da cui, ugagliando termine a termine con lo sviluppo di $f(y)$, si ottiene la relazione

$$c_n = \bar{c}_{-n} \quad \forall n ,$$

e in particolare $c_0 \in \mathbb{R}$. Allora scrivendo $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, si ha $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ e allora, usando la formula di Eulero¹⁷, possiamo riscrivere la serie come

$$f(y) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\alpha y) + b_n \sin(n\alpha y)] .$$

Possiamo notare ancora che non è necessario usare sia seni che coseni, purché si introduca uno sfasamento. Infatti la relazione

$$A \cos(\alpha y + \phi) = a \cos(\alpha y) + b \sin(\alpha y)$$

è verificata se

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad \tan \phi = \frac{b}{a} .$$

Allora posso scrivere infine

$$f(y) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\alpha y + \phi_n) ,$$

¹⁷ $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

che ci garantisce che tutte le soluzioni finora usate fossero valide.

A commento finale, tutto questo giustifica ciò che in questo testo si è sempre sfruttato, ovvero che il suono può essere pensato come sovrapposizione di onde sinusoidali di frequenza diversa.

Tuttavia c'è ancora un problema da tenere in considerazione, e cioè il fatto che il suono può non essere periodico; questo problema si risolve in tre modi, a seconda di ciò che si vuole fare.

1. Se, ad esempio, siamo interessati ad uno sviluppo di un suono infinito non periodico dobbiamo necessariamente passare dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier, ma ciò è piuttosto complicato.
2. Viceversa di solito in natura cose infinite non esistono, e un suono infatti avrà un inizio e una fine nel tempo. Allora basta pensare di prendere la forma d'onda di un tale suono e periodicizzarla ed è quindi possibile scrivere la serie di Fourier¹⁸.
3. L'ultima cosa, che è quella di gran lunga più usata in musica, è quella di considerare uno sviluppo in serie di Fourier dinamico, ovvero, in altri termini, di pensare come dipendenti dal tempo i coefficienti dello sviluppo. La cosa sembra complessa, ma in realtà ciascuno di noi ne ha familiarità. Spesso i lettori musicali (sul computer) hanno un *analizzatore di spettro*, quel grafico a bande in cui le barre si alzano corrispondentemente al volume di ciascuna frequenza, variando in continuazione. Questo grafico altro non è che la rappresentazione dei coefficienti A_n in funzione di n , ovvero della frequenza.

Il significato di questo è molto legato al modo dell'uomo di sentire le cose. Se sentiamo un suono siamo in grado di dire che esso è grave o acuto senza che per questo esso debba essere infinito...

Allora l'idea è quella di visualizzare i coefficienti dello sviluppo che si ottiene periodicizzando (quindi nel modo al punto 2.) una piccola parte dell'onda sonora, di durata Δt . Anzi, più precisamente, al passare del tempo si seleziona quel pezzo di onda che va da $t - \Delta t$ a t e lo si periodicizza, trovando così dei coefficienti che sono funzione del tempo e che possono essere visualizzati.

Resta da scegliere il tempo Δt . Nel caso dell'uomo, che sente frequenze da circa $f_{\min} = 16$ Hz a circa $f_{\max} = 12$ kHz, per poter garantire di riconoscere tutte le frequenze di un suono sarebbe opportuno che $\Delta t \gg \frac{1}{f_{\min}} \simeq 0.06$ s; inoltre, per non confondere sovrapposizioni di suoni (in una canzone ad esempio), occorre che Δt sia molto più piccolo del tempo minimo di variazione della musica (un cambio di accordo, un colpo di cassa...), che più o meno è ancora circa uguale al decimo di secondo. Trovando un compromesso si può costruire l'analizzatore di spettro.

A.3 Impedenze complesse

Vi sarete chiesti se, data la difficoltà nello studio di un circuito semplice come quello in Figura 4, sia complicatissima la trattazione di circuiti più complessi. La realtà è che per fortuna esiste una maniera molto semplice di studiare i circuiti, a patto però di avere un po' di dimestichezza coi numeri complessi.

Abbiamo già capito che per studiare un circuito basta capire come esso risponde a sollecitazioni di tipo sinusoidale. Supponiamo quindi che in un circuito sia presente in un punto una tensione

¹⁸Si può vedere la cosa in un altro modo: se si considera come periodo del suono tutta la sua durata, allora lo sviluppo in serie coincide di fatto col suono solo nell'intervallo di tempo in cui il suono è effettivamente presente.

$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$. Notiamo che se introduciamo una tensione¹⁹ complessa $\tilde{V}(t)$ definita da

$$\tilde{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

si può riottenere $V(t)$ come

$$V(t) = \Re \left[\tilde{V}(t) \right] .$$

Non solo, ma sussistono le relazioni esplicite

$$V_0 = |\tilde{V}(t)| \quad , \quad \omega t = \arg \left[\tilde{V}(t) \right]$$

che sono molto importanti, perché sappiamo che nel prodotto di numeri complessi i moduli si moltiplicano e le fasi si sommano!

Questo è il punto fondamentale, perché grazie a questa osservazione ora possiamo introdurre il concetto di *impedenza complessa* Z associata ad un elemento circuitale. Per prima cosa analizziamo l'idea da un punto di vista matematico, poi vedremo come legarla ad elementi circuitali reali.

È chiaro che possiamo scrivere

$$Z = |Z| e^{i \arg Z} .$$

A questo punto supponiamo, come accade per una resistenza, che sussista un legame tra tensione e corrente, ma complesse stavolta, e che questo sia dato proprio da Z :

$$\tilde{V}(t) = Z \tilde{I}(t) \tag{13}$$

(si noti che Z ha le dimensioni di una resistenza) che si può anche scrivere mediante la coppia di relazioni

$$V_0 = |Z| I_0 \quad , \quad \phi = \arg Z$$

dove abbiamo supposto che la corrente sia sfasata rispetto alla tensione di ϕ : per capirci, se $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ allora $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$.

La cosa fantastica è che tramite l'impedenza complessa Z possiamo gestire non solo il rapporto tra le ampiezze di tensione e corrente, ma anche i loro sfasamenti!

E non è finita qui, perché se effettivamente agli elementi circuitali posso associare un'impedenza, data la stretta analogia tra questa e la resistenza (si veda la definizione (13) di Z), è immediato capire che le impedenze soddisfano le stesse regole²⁰ di combinazione in serie e in parallelo delle resistenze! Per impedenze Z_i in serie si ha

$$Z_{tot} = \sum_i Z_i$$

e per impedenze Z_j in parallelo si ha

$$\frac{1}{Z_{tot}} = \sum_j \frac{1}{Z_j} ;$$

questa proprietà è importantissima perché permette di fare conti molto velocemente.

¹⁹ Analogamente si introduce una corrente complessa $\tilde{I}(t)$.

²⁰ Per convincersene basta ripensare a come tali regole si dimostrano per le resistenze e notare che ciò dipende solo dalla definizione di resistenza, ma quella di impedenza è analoga...

Ora bisogna chiedersi se esistono elementi circuitali che sono descritti da un'impedenza (che per ora è stata definita solo matematicamente, ma che già ci piace molto). A priori Z può dipendere dalla pulsazione ω (e vedremo che così è, ed è proprio ciò che ci piace per i filtri). Cominciamo a considerare un caso semplicissimo: un *resistore* (di resistenza R). Sarebbe un insulto dimostrare che esso non sfasa il segnale; inoltre sappiamo che per definizione deve essere $V_0 = RI_0$. Quindi un resistore è banalmente descritto da un'impedenza reale

$$Z_R = R$$

e non dipende da ω .

Vediamo adesso cosa succede per un *condensatore*. La legge base per un condensatore di capacità C è $Q(t) = CV(t)$, dove $Q(t)$ è la carica del condensatore. D'altro canto è noto che la corrente per definizione è la variazione di carica nell'unità di tempo, $I(t) = \frac{dQ}{dt}$. Supponiamo quindi che $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, allora

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -CV_0\omega \sin(\omega t) = CV_0\omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

ovvero sussistono le relazioni

$$V_0 = \frac{1}{\omega C} I_0 \quad , \quad \phi = -\frac{\pi}{2},$$

il che permette di asserire che anche per un condensatore è possibile definire un'impedenza

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} e^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{\omega C} = \frac{1}{i\omega C}.$$

Come si vede in questo caso Z dipende da ω , ma solo nel suo modulo e non nella fase. Provare per esercizio che vale una relazione simile per un'induttanza L :

$$Z_L = i\omega L.$$

Come applicazione di tutto ciò proviamo a calcolare la funzione di trasferimento $H(\omega)$ per un filtro passa basso. Essa è definita come la tensione (complessa) in uscita diviso la tensione (complessa) di ingresso:

$$H(\omega) = \frac{\tilde{V}'(t)}{\tilde{V}(t)}.$$

Nel caso del filtro passa basso, che è analogo ad un partitore di tensione, si ha

$$H(\omega) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{1}{1 + i\omega RC},$$

da cui il rapporto tra le ampiezze è dato dal modulo di H

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

e lo sfasamento $\phi = \arg H$ si ottiene da

$$\tan \phi = -\omega RC,$$

risultato che prima avremmo faticato ad ottenere.