

Esercitazione 11 e 12

Marco Bonvini

21 Aprile 2017

1 Il calice di cristallo semplificato

Un pesetto di massa $m = 0.10\text{kg}$ è appoggiato su un tavolo piano orizzontale senza attrito. Il pesetto è connesso ad una fune, che passa per un buco al centro del tavolo. Sotto al buco, all'altra estremità della fune, è appeso un calice di cristallo di massa $M = 0.50\text{kg}$. All'istante iniziale il calice è appena sotto il tavolo, e tutta la fune (di lunghezza $\ell = 1.0\text{m}$) sta sul piano del tavolo ed è tesa. Il pesetto di massa m all'istante iniziale si muove con una velocità ortogonale alla fune di intensità v_0 . Mostrare che il sistema resta in "equilibrio" (ovvero il calice non si muove) se

$$v_0 = v_{\text{eq}} \equiv \sqrt{\frac{Mg\ell}{m}} = 7.0\text{m/s}.$$

Si supponga adesso $v_0 < v_{\text{eq}}$, specificamente $v_0 = 1.0\text{m/s}$. Si dimostri che il calice scende al massimo di

$$x_{\text{max}} = \ell \left[1 - \frac{v_0^2}{4v_{\text{eq}}^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8v_{\text{eq}}^2}{v_0^2}} \right) \right] = 0.89\text{m},$$

dopodiché risale alla posizione di partenza. Si dimostri che il tempo necessario per un ciclo completo è

$$T = 2 \int_0^{x_{\text{max}}} dx \sqrt{\frac{(M+m)(\ell-x)^2}{2Mgx(\ell-x)^2 - mv_0^2(\ell^2 - (\ell-x)^2)}} = 1.0\text{s}.$$

Qual'è l'energia cinetica massima del sistema?

$$[\text{Sol: } K_{\text{max}} = \frac{1}{2}mv_0^2 \frac{\ell^2}{(\ell-x_{\text{max}})^2} = 4.4\text{J}]$$