

Esercitazione 32 e 33

Marco Bonvini

20 Giugno 2017

1 Il razzo

Un razzo è composto da un corpo di massa $M = 2.5\text{ton}$ più la massa di carburante (inizialmente m_0). Il motore sviluppa una potenza di 1.21GW bruciando 50kg di carburante al secondo. Quanto carburante serve per sfuggire al campo gravitazionale terrestre?

($M_{\oplus} = 5.97 \cdot 10^{24}\text{kg}$, $R_{\oplus} = 6370\text{km}$)

[Sol: Definiamo $m(t)$ la massa complessiva del razzo più carburante. Conosciamo $\dot{m} = -50\text{kg/s}$ e la potenza $P = 40\text{MW}$, entrambi costanti finché vi è carburante. Dopo vari passaggi si arriva all'equazione $m\left(\ddot{x} + \frac{GM_{\oplus}}{x^2}\right) = \sqrt{-2P\dot{m}}$. Al tempo $t = 0$ abbiamo $m = M + m_0$, $x = R_{\oplus}$, $\dot{x} = 0$.

Al tempo $t = t^*$, quando finisce il carburante, deve essere $m = M$, $x = x^*$ tale che $\dot{x} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{x^*}}$ sia la velocità di fuga dal campo gravitazionale terrestre alla distanza x^* cui si trova il razzo. Visto che \dot{m} è costante, la funzione $m(t) = M + \dot{m}(t - t^*)$ è nota, con $m_0 = -\dot{m}t^*$. Si tratterebbe di risolvere l'equazione

$$\ddot{x} + \frac{GM_{\oplus}}{x^2} = \frac{\sqrt{-2P\dot{m}}}{M + \dot{m}(t - t^*)}.$$

Si noti che affinché il razzo si stacchi da terra deve essere

$$\ddot{x}(0) = \frac{\sqrt{-2P\dot{m}}}{M + m_0} - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} > 0 \quad (1)$$

da cui segue

$$m_0 < \frac{R_{\oplus}^2 \sqrt{-2P\dot{m}}}{GM_{\oplus}} - M = 33\text{ton}, \quad t^* < 659\text{s}. \quad (2)$$

Saturare questo limite non sarebbe ottimale perché richiederebbe molto carburante rendendo il razzo molto pesante. D'altro canto, un valore piccolo di t^* massimizzerebbe l'accelerazione ma essa durerebbe poco. La situazione ideale sarà una via di mezzo. Si noti che il tempo massimo in cui dobbiamo risolvere l'equazione a massa variabile è circa 10min . In questo tempo il razzo non può allontanarsi troppo dalla superficie terrestre, e quindi x non sarà troppo diverso da R_{\oplus} . Si può quindi in prima approssimazione scrivere $x(t) \simeq x_1(t)$ con

$$\ddot{x}_1 = \frac{\sqrt{-2P\dot{m}}}{M + \dot{m}(t - t^*)} - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2},$$

la cui soluzione è facile da ricavare (utilizzando la condizione al contorno al tempo $t = 0$ ovviamente). In seconda approssimazione, possiamo espandere

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{R_{\oplus}^2} \left[1 - 2 \left(\frac{x}{R_{\oplus}} - 1 \right) + \dots \right] \quad (3)$$

ed, usando la soluzione al punto precedente, possiamo scrivere $x(t) \simeq x_2(t)$ con

$$\ddot{x}_2 = \frac{\sqrt{-2P\dot{m}}}{M + \dot{m}(t - t^*)} - \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \left[1 - 2 \left(\frac{x_1(t)}{R_{\oplus}} - 1 \right) \right].$$

Anche in questo caso risolvere l'equazione è abbastanza semplice. A questo punto, imponendo la condizione al contorno in $t = t^*$, si può ricavare t^* . L'equazione è complicata: numericamente si trova $t^* \simeq 270$ s. A conferma della procedura, troviamo anche che $x_2(t^*) \simeq 1.14R_{\oplus}$, che è abbastanza vicino a R_{\oplus} , e in particolare $1.14^{-2} = 0.77 \simeq 1 - 2 \times 0.14 = 0.72$. Segue che, con un certo livello di accuratezza, la massa di carburante necessaria è $m_0 = 13.5$ ton.]

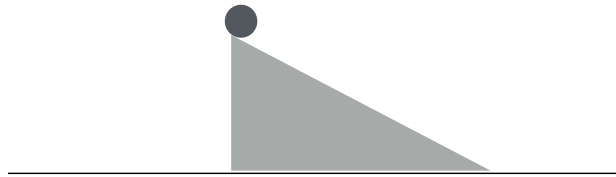
2 Cilindro su piano inclinato che scivola sul piano

Un piano inclinato di un angolo $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale di massa $M = 6.0$ kg appoggia senza attrito su un tavolo orizzontale liscio. Il sistema è inizialmente a riposo. In cima al piano inclinato (alto $h = 25$ cm) viene appoggiato un cilindro di massa $m = 2.0$ kg e raggio $r = 3$ cm. Tra cilindro e piano inclinato vi è sufficiente attrito da non permettere strisciamento. Al tempo $t = 0$ il cilindro viene lasciato libero di muoversi. Determinare:

1. la velocità del cilindro quando raggiunge il tavolo;
2. lo spostamento orizzontale del cilindro quando raggiunge il tavolo;
3. il tempo impiegato dal cilindro a raggiungere il tavolo.

Assumendo che il cilindro mantenga la componente orizzontale della velocità quando comincia a scivolare sul tavolo, si determini

4. la perdita di energia del cilindro nell'istante del contatto col tavolo orizzontale.



[Soluzione:

1. La velocità relativa v_{rel} del cilindro rispetto al piano inclinato è legata alla velocità di rotazione del cilindro dalla relazione di puro rotolamento $v_{\text{rel}} = -r\omega > 0$. La velocità del cilindro nel sistema inerziale è data da

$$\begin{aligned} v_x &= V + v_{\text{rel}} \cos \theta = V - r\omega \cos \theta \\ v_y &= -v_{\text{rel}} \sin \theta = r\omega \sin \theta. \end{aligned}$$

Dalla conservazione della quantità di moto lungo x si ha $mv_x + MV = 0$ da cui

$$V = \frac{m}{M+m} r\omega \cos \theta.$$

Dalla conservazione dell'energia $mgh' = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ si trova

$$\omega = -\sqrt{\frac{8gh' M+m}{3r^2 2M+m}} = -6.4 \text{rad/s},$$

dove $h' = h - r(1 - \cos \theta) = 24.6$ cm. Segue

$$v_x = -\frac{M}{M+m} r\omega \cos \theta = 12 \text{m/s}$$

$$v_y = r\omega \sin \theta = -9.6\text{m/s},$$

con modulo $v = 16\text{m/s}$.

2. Dalla conservazione della quantità di moto lungo x , che inizialmente è nulla, segue che il centro di massa componente x non si sposta. Allora si trova immediatamente lo spostamento del cilindro:

$$\Delta x = \frac{M}{M+m} b$$

dove b è la lunghezza orizzontale del piano inclinato percorsa dal cilindro, ovvero $b = h'/\tan \theta$, da cui segue

$$\Delta x = \frac{M}{M+m} \frac{h'}{\tan \theta} = 32\text{cm}.$$

3. Dalla conservazione dell'energia generalizzata ad un istante generico, possiamo scrivere (manipolando l'equazione per ω qui sopra)

$$v_y(t)^2 = \frac{2gy(t)}{3} \frac{M+m}{2M+m}.$$

Derivando rispetto al tempo si trova

$$\dot{v}_y(t) = -\frac{g}{3} \frac{M+m}{2M+m}$$

da cui

$$v_y(t) = -\frac{g}{3} \frac{M+m}{2M+m} t.$$

Eguagliando questa espressione al valore della velocità finale si trova il tempo $t = 5.1\text{s}$.

4. Non essendoci attrito tra il tavolo e il cilindro, esso continua a ruotare con la stessa velocità angolare. Perciò l'unica variazione di energia cinetica è quella legata alla componente verticale della velocità:

$$\Delta K = K_f - K_{in} = -\frac{1}{2} m v_y^2 = -92\text{J}.$$

La variazione percentuale di energia è $\Delta K/K_{cil} = -21\%$.]