

Esercitazione 11 e 12

Marco Bonvini

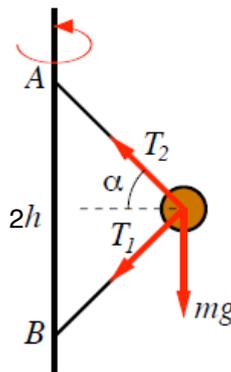
5 Aprile 2018

1 L'asta rotante sul suo asse

Una pallina di massa m è attaccata mediante due funi di uguale lunghezza ℓ a due punti A e B di una sbarra verticale di sezione trascurabile distanti l'uno dall'altro $2h$. L'intero sistema ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse della sbarra. Si calcoli:

1. la velocità angolare minima in corrispondenza della quale la fune inferiore comincia a tendersi (assumendo $h = 1.0\text{m}$);
2. la forza che ciascuna fune esercita sulla palla (assumendo $m = 2.5\text{kg}$, $\ell = 1.3\text{m}$, $h = 1.0\text{m}$, $\omega = 5.0\text{rad/s}$).

Cosa succede se il sistema ruota con velocità angolare $\omega < \sqrt{g/\ell}$?



[Sol: 1. $\omega_{\min} = \sqrt{g/h} = 3.1\text{rad/s}$; 2. $T_{\pm} = \frac{m\ell}{2h}(\omega^2 h \pm g) = \{57, 25\}\text{N}$]

2 Pendolo cicloide

Si consideri un soffitto la cui forma, proiettata sul piano verticale, sia quella di una cicloide inversa, di equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ru - r \sin u \\ -r + r \cos u \end{pmatrix}, \quad (1)$$

con u parametro e r raggio della ruota che genera la cicloide. All'origine del sistema di coordinate, coincidente con una delle cuspidi della cicloide, viene appesa una fune inestensibile e di massa trascurabile di lunghezza $L = 4r$. Al suo estremo si trova un corpo puntiforme di massa m . Si dimostri che tale setup realizza un pendolo isocrono, la cui pulsazione non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione, e se ne scriva la legge oraria. Si mostri inoltre che la traiettoria del corpo puntiforme è anch'essa una cicloide della stessa dimensione.

[Sol: Si usi come parametro l'angolo θ della parte rettilinea della fune rispetto alla verticale.

Ci si concentri su uno dei due archi di cicloide, specificamente quello ottenuto per $u \in [0, \pi]$, ovvero $x \in [0, \pi r]$, $y \in [-2r, 0]$, ovvero $\theta \in [0, \pi/2]$. In questa regione l'equazione cartesiana della cicloide si scrive

$$x = r \cos^{-1}\left(1 + \frac{y}{r}\right) - \sqrt{-y^2 - 2yr} \quad (2)$$

da cui possiamo calcolare

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{-y^2 - 2ry}} = -\left(-1 - 2\frac{r}{y}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\tan \theta. \quad (3)$$

Il punto P in cui la fune si distacca dal profilo cicloidale è dato quindi dalle coordinate

$$\begin{pmatrix} x_P(\theta) \\ y_P(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r(\theta - \sin \theta \cos \theta) \\ -2r \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4)$$

La lunghezza della cicloide dalla cuspide al punto P e' data da

$$\ell(\theta) = \left| \int_0^{y_P(\theta)} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \right| = 4r \int_0^\theta d\theta' \sin \theta' = 4r(1 - \cos \theta). \quad (5)$$

Si osservi quindi che mezza cicloide è lunga $4r$, ovvero la stessa lunghezza della fune (scelta non casuale). Quindi la parte di fune retta ha lunghezza $\delta\ell(\theta) = 4r \cos \theta$. La posizione del corpo all'fine della fune ha quindi le coordinate

$$\begin{pmatrix} x_C(\theta) \\ y_C(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P(\theta) + \delta\ell(\theta) \sin \theta \\ y_P(\theta) - \delta\ell(\theta) \cos \theta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2\theta + \sin(2\theta) \\ -3 - \cos(2\theta) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Vediamo all'istante che questa è l'equazione parametrica di una cicloide di raggio r e parametro 2θ . A questo punto occorre scrivere le equazioni del moto. Dopo varie manipolazioni si trova

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \theta + \frac{g}{4r} \sin \theta = 0, \quad (7)$$

con soluzione

$$\theta(t) = \sin^{-1}(A \cos \omega t), \quad \omega^2 = \frac{g}{4r} = \frac{g}{L}, \quad A \leq 1. \quad (8)$$

Quindi il moto del pendolo ha la stessa pulsazione di un pendolo semplice della stessa lunghezza, tuttavia essa non dipende dall'ampiezza di oscillazione, in quanto nessuna approssimazione è stata utilizzata.]

3 Guida con molla

Una massa m si può muovere lungo una guida fissa agli estremi, priva di attrito, inclinata a formare un angolo θ con il piano orizzontale, con $\tan \theta = 1/2$. La massa è connessa ad un estremo di una molla ideale di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla. L'altro estremo della molla è connesso ad un punto B fisso, che giace al di sotto della guida. All'inizio la massa viene tenuta ferma nel punto A , alla stessa quota di B (la molla è orizzontale). La distanza tra A e B è $d = 50\text{cm}$. All'istante $t = 0$ la massa viene lasciata libera di muoversi.

1. Si calcoli il valore k della costante elastica della molla sapendo che se la massa vale $m = m_0 = 80\text{g}$ essa si trova in equilibrio in A .

2. Si calcoli il valore $m = m_1 < m_0$ affinché questa massa raggiunga il punto C , posizionato sulla guida esattamente sopra a B , con velocità nulla.
3. Si scriva l'energia potenziale del sistema in funzione dei parametri e della coordinata x lungo la guida (con $x_A = 0$), e la forza risultante lungo la direzione della guida.
4. Si discuta il moto della massa m .

[Sol. 1. $k = (m_0 g / d) \tan \theta = 0.78 \text{ N/m}$; 2. $m_1 = \frac{k d}{2g} \frac{1 - \tan^2 \theta}{\tan \theta} = m_0 \frac{1 - \tan^2 \theta}{2} = \frac{3}{8} m_0 = 30 \text{ g}$;
 3. $U(x) = mgx \sin \theta + \frac{1}{2} k (d^2 + x^2 - 2dx \cos \theta)$, $F_x = -k(x - x_0)$, $x_0 = d \cos \theta - \frac{mg}{k} \sin \theta = \frac{5}{8} d \cos \theta$;
 4. Moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{4g}{3d}}$ centrato in x_0]