

Esercitazione 15 e 16

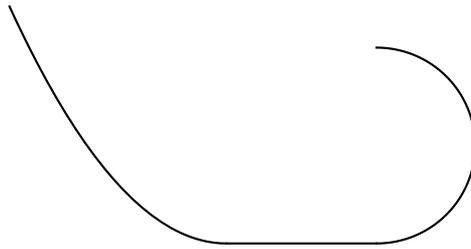
Marco Bonvini

13 Aprile 2018

1 Lo skater

Uno skater puntiforme immortale si muove su una pista costituita da mezza parabola, un tratto orizzontale lungo $\ell = 3.8\text{m}$, e un tratto semicircolare con raggio $r = 2.5\text{m}$. Sul tratto orizzontale vi è attrito con coefficiente dinamico $\mu = 0.30$, mentre sui tratti parabolico e circolare l'attrito è nullo.

1. A quale quota deve partire (da fermo) per fermarsi all'inizio del tratto semicircolare?
2. A quale quota deve partire (da fermo) per raggiungere la cima del tratto semicircolare?
3. A quale quota deve partire (da fermo) per cadere esattamente nel punto in cui comincia il tratto semicircolare?



[Sol: 1. $h = \mu\ell = 1.1\text{m}$; 2. $h \geq \frac{5}{2}r + \mu\ell = 7.4\text{m}$; 3. $h = \frac{7}{4}r + \mu\ell = 5.5\text{m}$ (ricordando che le soluzioni di $\xi^3 - 3\xi - 2 = 0$ sono $\xi = \{-1, -1, 2\}$)]

2 Molla con attrito

Si consideri una molla ideale di lunghezza di riposo ℓ e di costante elastica $m\omega^2$, e un corpo puntiforme di massa m tale che, se appeso alla molla in verticale, l'elongazione della molla sia il doppio della lunghezza di riposo. Adesso si appoggi la molla e il corpo su un piano, ancorando la molla sia al corpo che ad una parete fissa. Si assuma che tra il corpo e il piano vi sia attrito, con coefficiente dinamico $\mu_d = 1/5 = 0.2$. Comprime la molla fino a ridurne la lunghezza a zero, determinare il moto che ne segue. Che valore minimo deve avere il coefficiente di attrito statico μ_s affinché il corpo smetta di oscillare dopo mezzo periodo?

[Sol: Chiamando $m\omega^2$ la costante elastica della molla, si trova dal primo punto che $\ell\omega^2/g = 1$. Usando un sistema di coordinate centrato nella posizione iniziale della massa, l'equazione del moto dipende dalla direzione della velocità ed è data da

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2(x - x_-) & \text{per } \dot{x} > 0 \\ \ddot{x} = -\omega^2(x - x_+) & \text{per } \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (1)$$

con

$$x_{\pm} = \ell \left(1 \pm \frac{g\mu_d}{\omega^2 \ell} \right). \quad (2)$$

Il moto generico è

$$x(t) = \ell \left[1 - (-1)^n \frac{g\mu_d}{\omega^2 \ell} - \left(1 - (2n+1) \frac{g\mu_d}{\omega^2 \ell} \right) \cos(\omega t) \right], \quad n = \left\lfloor \frac{\omega t}{\pi} \right\rfloor, \quad (3)$$

valido finché la forza elastica vince su quella di attrito. Ignorando l'attrito statico (ovvero assumendo che $\mu_s = \mu_d$), la condizione per cui il moto prosegue dopo un turning point (ovvero un punto per cui $\dot{x} = 0$) è che x in quel punto sia maggiore di x_+ o minore di x_- (infatti, la regione $x_- < x < x_+$ è quella per cui il moto sicuramente non parte). I turning points sono ogni mezzo periodo, $t_k = k\pi/\omega$, e la condizione è soddisfatta per tutti i k tali che

$$k < \frac{\omega^2 \ell}{2g\mu_d} - \frac{1}{2}. \quad (4)$$

La soluzione sarà dunque valida fino al tempo $t_{k_{\max}+1}$, dove k_{\max} è il più grande k che soddisfa l'equazione sopra, ovvero la soluzione è valida per

$$t \leq \frac{\pi}{\omega} \left\lfloor \frac{\omega^2 \ell}{2g\mu_d} - \frac{1}{2} \right\rfloor. \quad (5)$$

Dopo tale tempo vince l'attrito e il corpo resta fermo. In generale, l'attrito statico è maggiore di quello dinamico, $\mu_s > \mu_d$, per cui è possibile che il corpo si fermi prima. A tal fine occorre verificare qual'è il primo turning point per cui l'attrito statico vince sulla forza elastica. La posizione al turning point è data da

$$x(t_k) = \ell \left[1 - (-1)^k + (-1)^k 2k \frac{g\mu_d}{\omega^2 \ell} \right], \quad (6)$$

da cui segue che la condizione $mg\mu_s \geq |F_{\text{a.s.}}| = | -m\omega^2(x(t_k) - \ell) |$ diventa

$$\frac{g\mu_s}{\omega^2 \ell} \geq \left| 1 - 2k \frac{g\mu_d}{\omega^2 \ell} \right|. \quad (7)$$

La condizione Eq. (4) garantisce che il modulo è sempre positivo nel range temporale in cui la soluzione è valida, per cui si trova

$$k \geq \frac{\omega^2 \ell}{2g\mu_d} - \frac{\mu_s}{2\mu_d} \quad \text{oppure} \quad \mu_s \geq \frac{\omega^2 \ell}{g} - 2k\mu_d. \quad (8)$$

La prima disuguaglianza ci dice per quale valori di k il corpo non si muoverà più, e quindi il minimo k che soddisfa l'equazione determina la posizione in cui il corpo si ferma. La seconda disuguaglianza permette di determinare quanto grande deve essere μ_s affinché il corpo non si muova da punto $x(t_k)$. Con i dati del problema, si trova $\mu_s \geq 1 - 2\mu_d = 3/5$. Deve anche essere $\mu_s < 1$ affinché il corpo cominci a muoversi dalla posizione iniziale.]